

ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ МАНГА



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В ДАННОЙ МАНГЕ В ИНТЕРЕСНОЙ И УВЛЕКАТЕЛЬНОЙ ФОРМЕ РАССКАЗАНО О СОВСЕМ НЕПРОСТОЙ ТЕМЕ – ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ.

ЧИТАТЕЛЬ ВМЕСТЕ СО ШКОЛЬНИЦЕЙ МИЦЗУКИ, ВТОРОКУРСНИКОМ НОЯМА ДАЙЧИ И БОГИНЕЙ ЧИСЕЛ УЗНАЕТ, ЗАЧЕМ НУЖНЫ УРАВНЕНИЯ В ОБЫЧНОЙ ЖИЗНИ, КАК ОНИ ПОМОГУТ ЗАПУСТИТЬ ПЛАНЕР, ПРЕДСКАЗАТЬ ПОГОДУ И КАК МИР МАТЕМАТИКИ СВЯЗАН С МИРОМ РЕАЛЬНЫХ ЛЮДЕЙ И ДЕЛ.

КНИГА БУДЕТ ПОЛЕЗНА ШКОЛЬНИКАМ СТАРШИХ КЛАССОВ, СТУДЕНТАМ МЛАДШИХ КУРСОВ ВУЗОВ, А ТАКЖЕ НАВЕРНЯКА ЗАИНТЕРЕСУЕТ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ ЛЮДЕЙ, КОТОРЫЕ ХОТЯТ ВСПОМНИТЬ, ЧТО ТАКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Интернет-магазин: www.dmkpress.com

Книга-почтой: orders@alians-kniga.ru

Оптовая продажа: "Альянс-книга".
(499)782-3889. books@alians-kniga.ru

DMK
издательство
www.dmk.ru

ISBN 978-5-97060-659-9



ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



Сато Минору
Адзума Сёко
Trend-Pro Co., Ltd.

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

МАНГА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сато Минору
Адзума Сёко



DMK
издательство

Ohmsha

Занимательная математика
Дифференциальные уравнения

Манга

マンガでわかる 微分方程式

佐藤 実 / 著
あづま 笙子 / 作画
トレンド・プロ / 制作



ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ МАНГА

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сато Минору

Художник Адзума Секо

Перевод

С. Л. Плехановой



Москва
ДМК Пресс, 2018

УДК 519.63
ББК 22.193
С21

Сато М.

- С21 Занимательная математика. Дифференциальные уравнения. Манга / Сато Минору (автор), Адзума Секо (худ.); пер. с яп. С. Л. Плехановой. — М.: ДМК Пресс, 2018. — 238 с. : ил. — (Серия «Образовательная манга»). — Доп. тит. л. яп.

ISBN 978-5-97060-659-6

В этой манге интересно и увлекательно рассказано о совсем непростой теме – дифференциальных уравнениях.

Читатель вместе со школьницей Мидзуки, второкурсником Нояма Дайчи и Богиней чисел узнает, зачем нужны уравнения в обычной жизни, как они помогут запустить планер, предсказать погоду, почему остывает кофе и как мир математики связан с миром реальных людей и дел.

Простота изложения помогает следить за занимательным сюжетом, суть которого в том, что богиня цифр помогла Нояме и Мидзуки понять и полюбить мир чисел.

Вы узнаете о разных способах решения уравнения, про уравнения Бернулли и о том, почему на Хоккайдо увеличилась численность оленей эдзо и как это предсказать. Оказывается, изменение температуры тела при его охлаждении, вычисление скорости ракеты, изменение интенсивности ощущений в зависимости от раздражителя и другие явления также описываются похожими дифференциальными уравнениями. Разве это не удивительно, что такие разные явления реального мира в мире математики подчиняются моделям одного вида? Если бы не было дифференциальных уравнений, из-за ветра рушились бы все мосты, но инженеры делают специальные расчеты колебаний.

Цель книги – заинтересовать школьников, студентов математикой. Она наверняка заинтересует любознательных людей, которые подзабыли, что такое дифференциальные уравнения.

УДК 519.63

ББК 22.193

Manga de Wakaru Bibunhouteishiki (Manga Guide: Differential Equation)

By Minoru Sato (Author), Shouko Azuma (Illustrator)

and TREND-PRO Co., Ltd. (Producer)

Published by Ohmsha, Ltd.

Russian language edition copyright © 2018 by DMK Press

Все права защищены. Никакая часть этого издания не может быть воспроизведена в любой форме или любыми средствами, электронными или механическими, включая фотографирование, ксерокопирование или иные средства копирования или сохранения информации, без письменного разрешения издательства.

ISBN 978-4-274-06786-0 (яп.) Copyright © 2009 Minoru Sato, Illustration by Shouko Azuma, Produced by TREND-PRO Co., Ltd.

ISBN 978-5-97060-659-6 (рус.) © Издание, перевод, ДМК Пресс, 2018

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дифференциальные уравнения кажутся сложными, не так ли? Они и в самом деле сложные. Если честно, когда я ходил на лекции, я тоже не очень-то их понимал. Подобно герою этой манги, Даичи Нояма, я мог решать дифференциальные уравнения, но толком не понимал, что я делаю и почему. Я запомнил примеры решений и все формулы, решал задания из учебников, но все равно было ощущение, что я как в тумане.

Начнем с того, что решать дифференциальные уравнения действительно трудно. И так просто решения не найти. Таково распространенное мнение. Но на лекциях не дают уравнения, которые нельзя решить. А если известен способ решения какого-то дифференциального уравнения, то, значит, можно решить любое уравнение такого типа. Любой человек, разбирающийся в математике, может решить дифференциальное уравнение, если будет следовать формулам и примеру уже известных решений. Но, вступая в эту еще не привычную область математики, можно легко увязнуть в формулах и сложных преобразованиях и не видеть общей картины. В то время как, если остановиться и осмотреться, можно увидеть величественную картину.

Поэтому эта книга была написана, чтобы стать вашим путеводителем в мире дифференциальных уравнений, по которому вы будете путешествовать, следуя рекомендованному маршруту. Эта книга отличается от обычного учебника, и она не охватывает всего, что касается дифференциальных уравнений, и в ней нет строгости и универсальности, присущей учебникам. Прежде всего просто следуйте предложенному маршруту и наслаждайтесь открывающимися видами. Свободный полет в мире дифференциальных уравнений может доставить такие же захватывающие ощущения, как и реальный полет в небе. У людей нет крыльев, но они их создали и теперь могут летать по небу. Также и с помощью дифференциальных уравнений, как с помощью крыльев, можно свободно «летать» в мире математики. Я буду счастлив, если эта книга станет для вас толчком для взлета в мир дифференциальных уравнений.

В завершение я хочу от всего сердца поблагодарить сотрудников издательства Ohmsha, благодаря которым эта книга смогла появиться на свет; SWP, благодаря которому в сценарии появилась богиня цифр, что сделало книгу более увлекательной; художницу Адзума Секо, которая проделала большую работу и создала детальные иллюстрации к абстрактному миру математики. Эта книга – результат командной работы.

*Ноябрь 2009 года
Сато Минору*

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	V
-------------------	---

Пролог

БОГИНЯ ЦИФР ИЗ ХРАМА ЧИСЕЛ	1
----------------------------------	---

Глава 1

ЧТО ТАКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	9
--	---

Глава 2

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНАЛИЗА	25
--------------------------------	----

1. Функции, переменные и графики	29
Экспоненциальные функции	38
Логарифмические функции	39
Тригонометрические функции	40
Гиперболические функции	41
2. Дифференциалы	42
3. Интегрирование	54

Глава 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ	69
--	----

1. Явление	72
2. Модель	74
3. Решение	78
4. Интерпретация	82
5. Закон Мальтуса	91
Явление	96
6. Радиоактивный распад	96

Модель	99
Решение.....	100
Интерпретация.....	101
7. Разные явления, одна модель	104
8. Логистическая модель.....	105

Глава 4

НЕОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

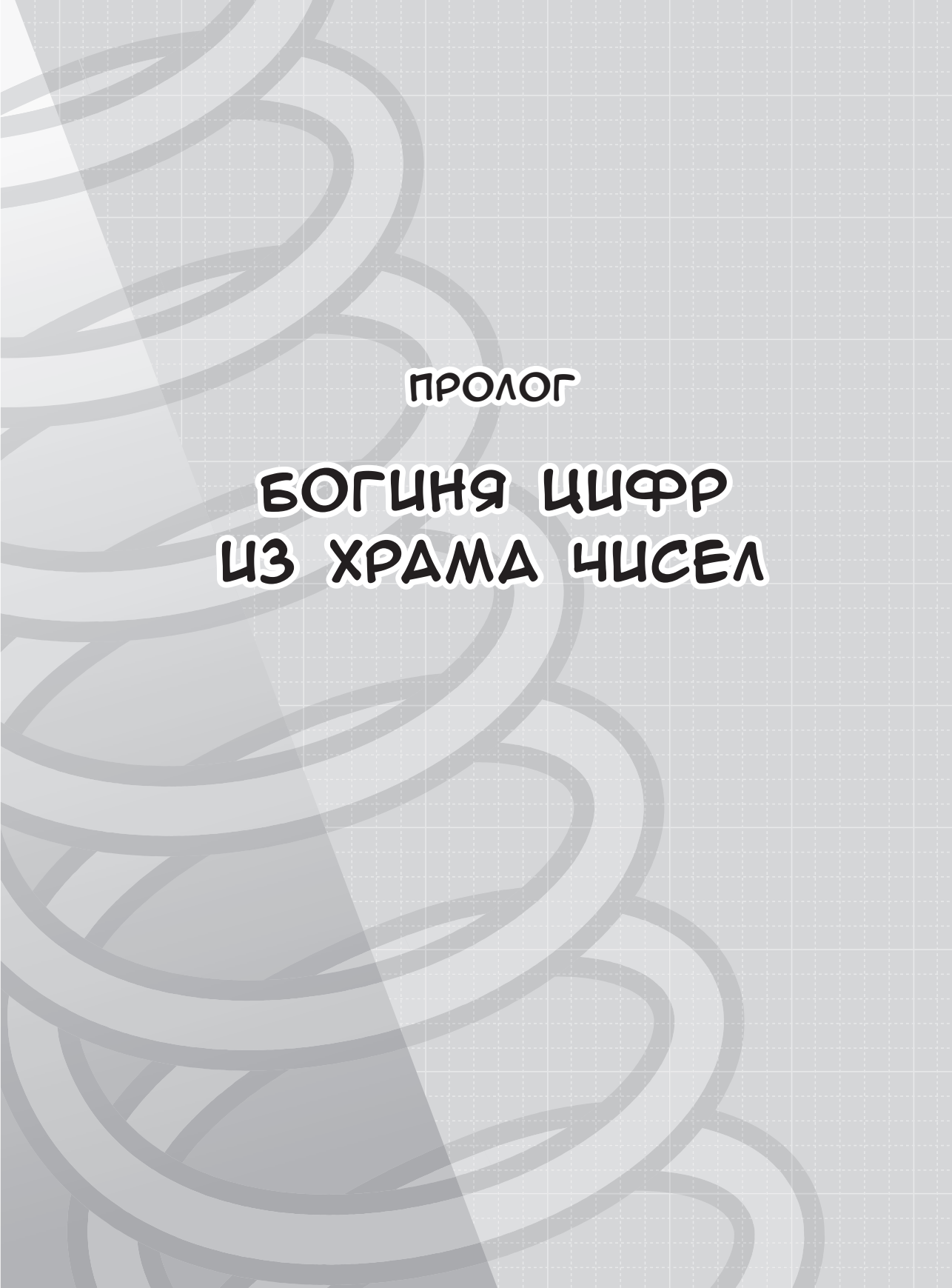
1. Явление.....	116
2. Модель.....	123
3. Решение	131
Итоговые вычисления	134
4. Интерпретация	136
5. Метод вариации произвольных постоянных	145

Глава 5

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Явления колебаний.....	152
2. Колебания. Модель 1	157
3. Колебания. Модель 2. Простые колебания	164
Решение задачи с учетом силы сопротивления.....	172
4. Колебания. Модель 3. Когда есть сопротивление	172
Решение с учетом воздействия силы сопротивления. Случай 1 (затухающие колебания).....	180
Решение с учетом воздействия силы сопротивления. Случай 2 (сильное затухание).....	185
Решение с учетом воздействия силы сопротивления. Случай 3 (критическое затухание)	190
5. Итоги. Характеристические уравнения	195
Решение с учетом воздействия внешней силы	197
6. Возвращение к модели колебаний 1 с учетом внешних сил.....	197
Интерпретация решения с учетом внешней силы.....	201

ПРИЛОЖЕНИЕ	211
1. Охлаждение кофе	212
2. Полет ракеты	215
3. Интенсивность ощущения	216
4. Эффективность рекламы	217
5. Интегрирующий множитель	222
6. Снова логистическая модель	224
 АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.....	 228



ПРОЛОГ

**БОГІНЯ ЦИФР
ІЗ ХРАМА ЧИСЕЛ**



Богиня цифр –
хранительница Храма чисел
(Возраст не известен)



Эй, мидзуки!

ДАЙ-КА МНЕ
ВСЕЛИТЬСЯ В ТЕБЯ.

Я ХОЧУ ВЫЙТИ
ИЗ ХРАМА.

НИКАК НЕЛЬЗЯ,
ГОСПОЖА БОГИНЯ
ЦИФР, ЭТО ОЧЕНЬ
ТЯЖЕЛО ДЛЯ МЕНЯ.

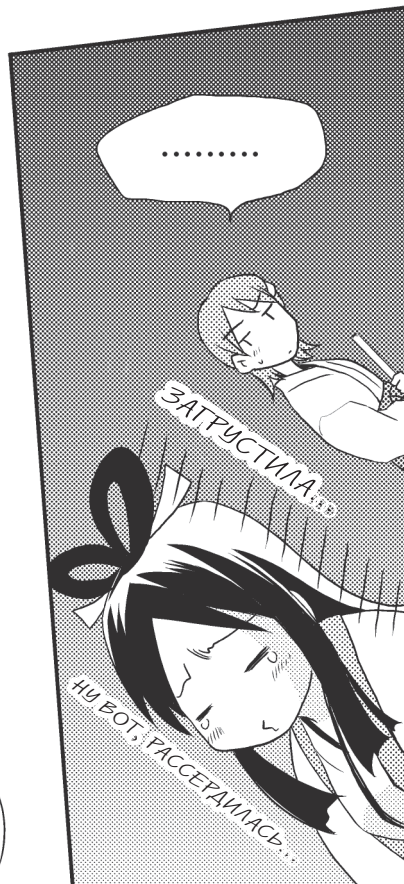
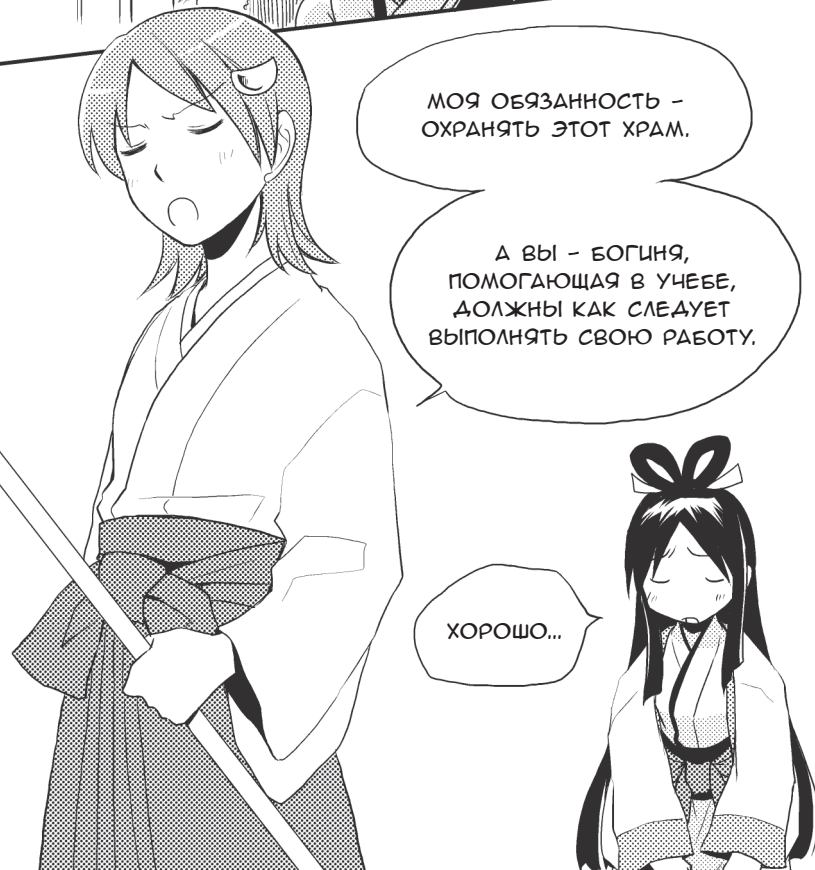
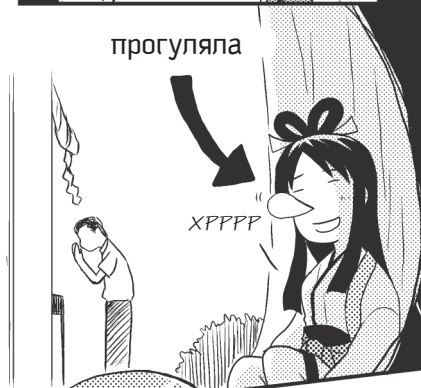
Мидзуки – служанка
при Храме чисел

ДА И КРОМЕ ТОГО,
НЕЛЬЗЯ ОСТАВЛЯТЬ
ХРАМ БЕЗ БОЖЕСТВА.

НО ВЕДЬ
ПОСЕТИТЕЛЕЙ НЕТ,
И МНЕ ВСЕ РАВНО
НЕЧЕГО ДЕЛАТЬ...

ЖАДИНА...

MMM







НЕ ПРИКЛАДЫВАЙСЯ!!

А, ДАВАЙ,
УЧИСЬ КАК СЛЕДУЕТ!!!

ОЙ, ПРОСТИТЕ...
ПРОСТИТЕ...

ГОСПОЖА
БОГИНЯ!!

НО ВЕДЬ ЭТО
УЖ СЛИШКОМ,
ПРОСИТЬ О ТАКОМ!

МОЛОДОЙ ЧЕЛОВЕК,
СКАЖИТЕ, ПОЧЕМУ
ВЫ ХОТИТЕ ИМЕННО
ЭТОГО?

НУ, ЭТО...

Я ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ НУ НИКАК
НЕ МОГУ ПОНЯТЬ...

КОГДА САМ
ПЫТАЮСЬ РЕШАТЬ,
ТО СОВСЕМ НЕ
ПОНИМАЮ, ЧТО ДЕЛАТЬ...

ПОЭТОМУ ХОТЕЛОСЬ
БЫ ХОТЬ НЕМНОГО
ПОЛУЧШЕ
СООБРАЖАТЬ...

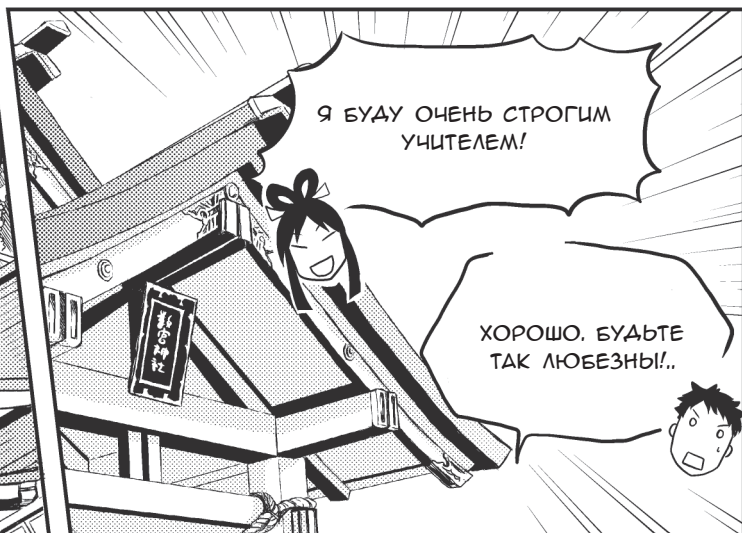
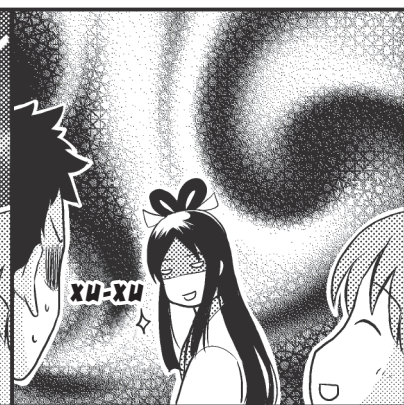
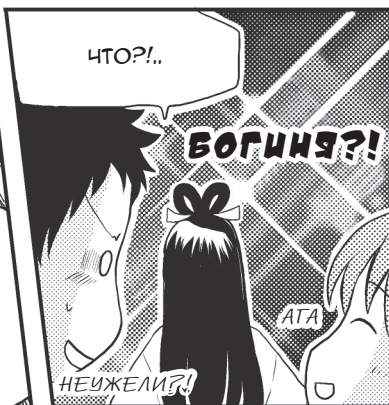
ХММ...

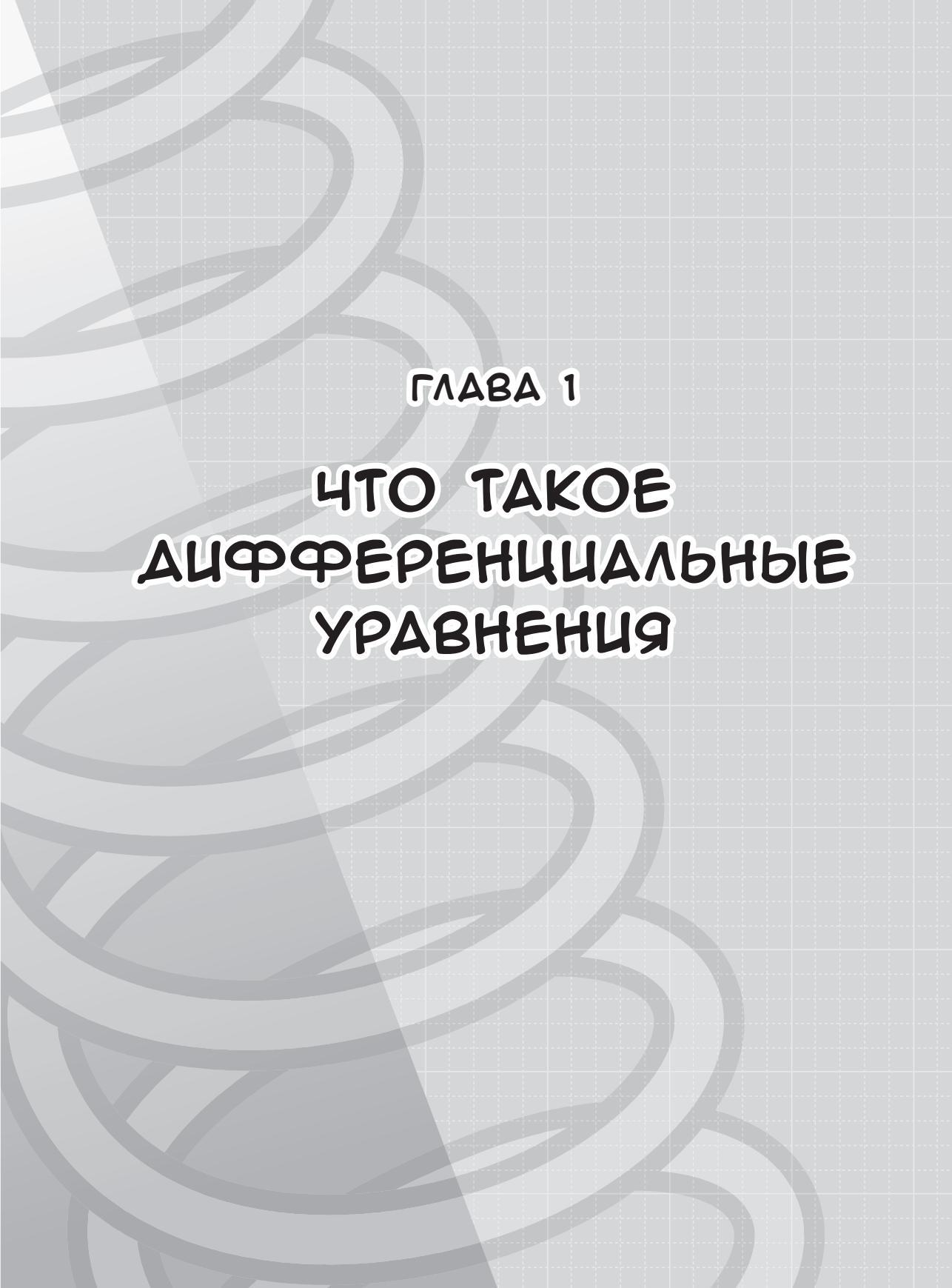
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ?..

НУ ЧТО Ж,
ХОРОШО.

Я УСЛЫШАЛА
ТВОЕ ПОЖЕЛАНИЕ.

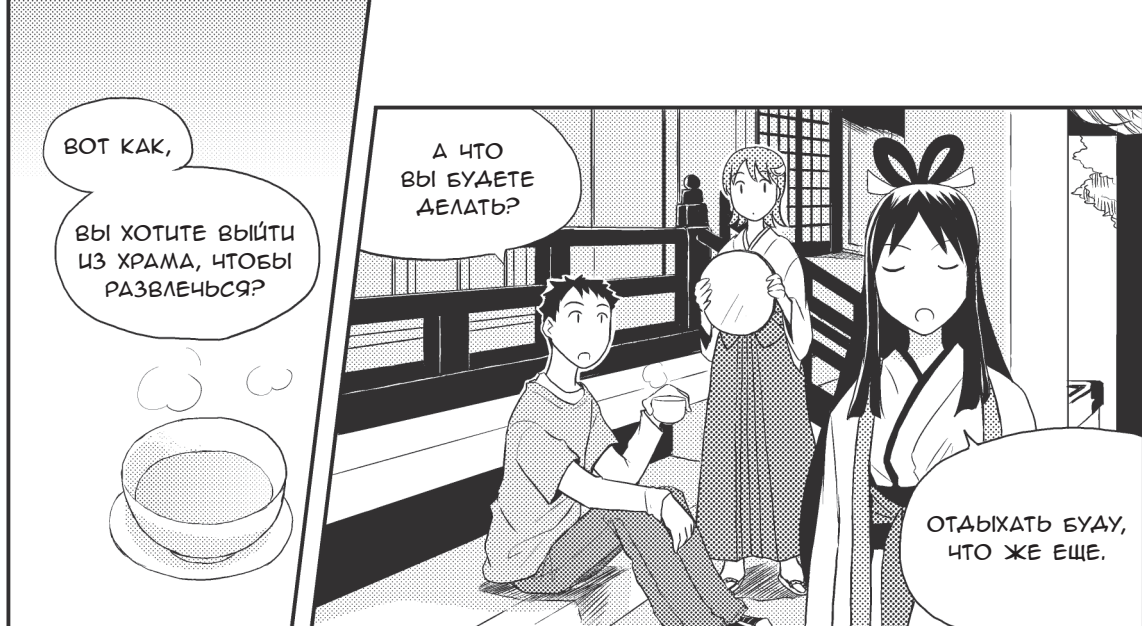
ММ?



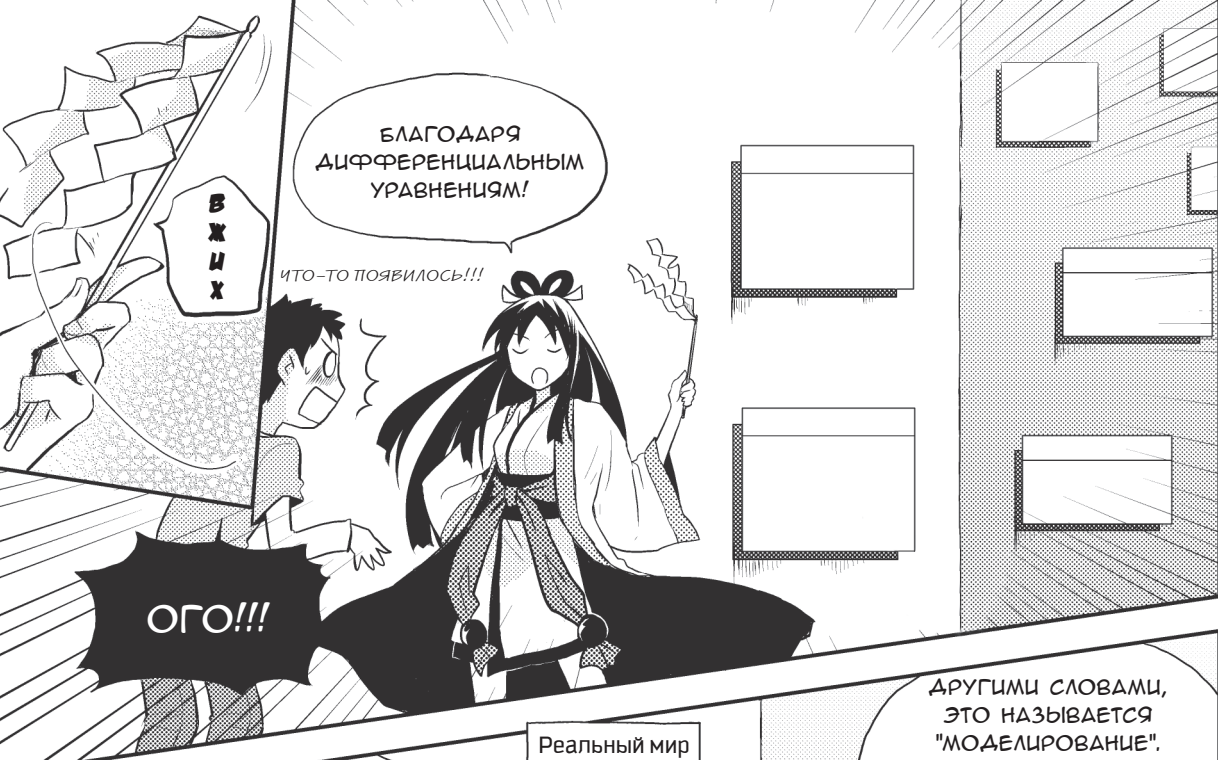


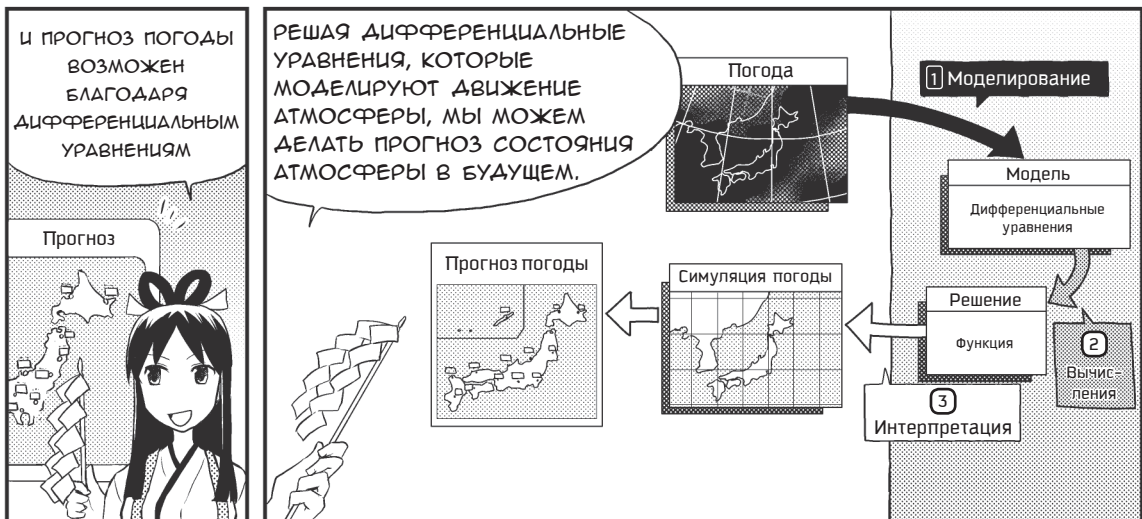
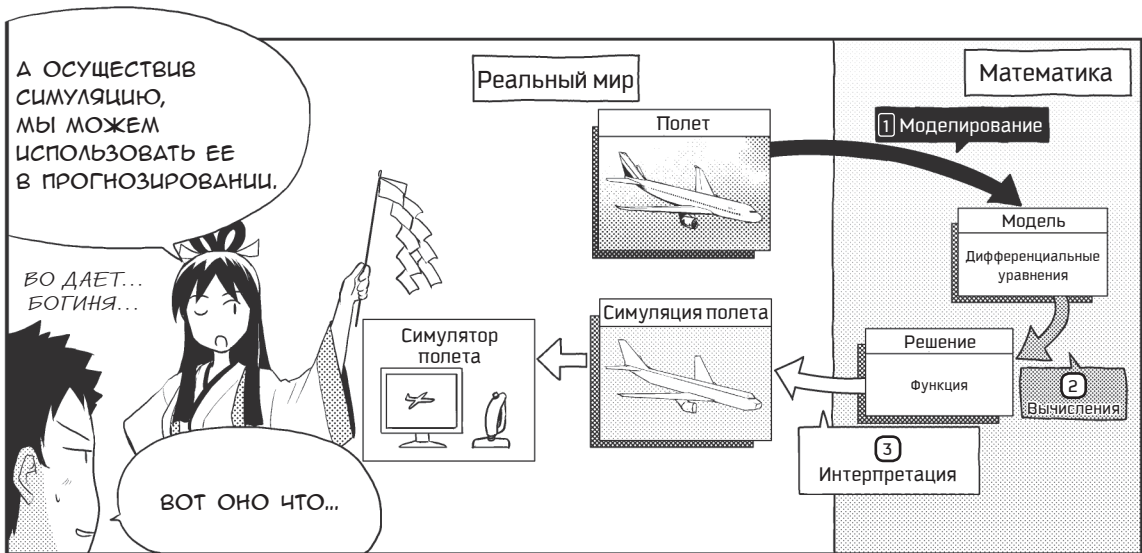
ГЛАВА 1

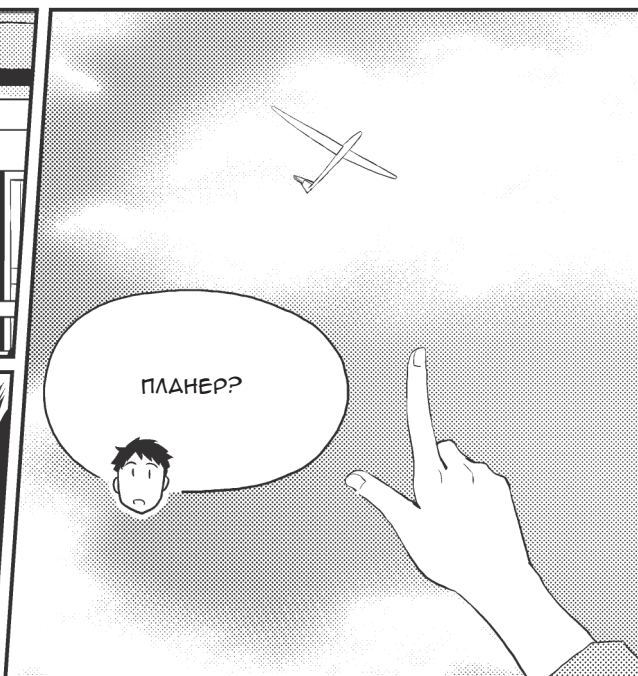
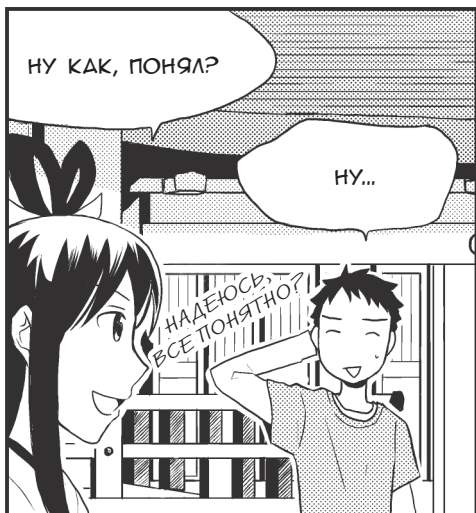
ЧТО ТАКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

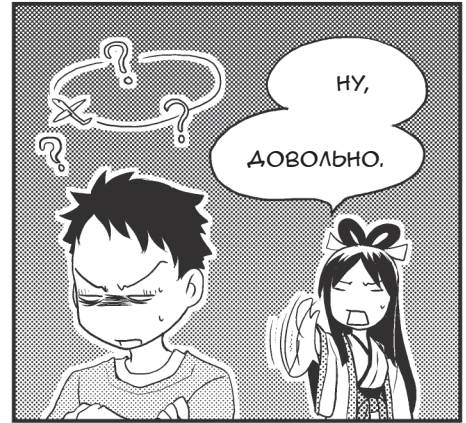












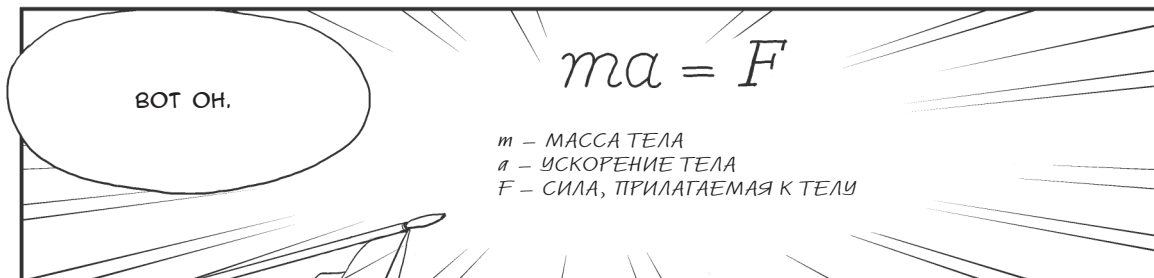


СЛУШАЙ
ДАЛЬШЕ.

МЫ ЗНАЕМ ЗАКОН
ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА.



ЭТО ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ
НЬЮТОНА.



ВОТ ОН.

$$ma = F$$

m – МАССА ТЕЛА
 a – УСКОРЕНИЕ ТЕЛА
 F – СИЛА, ПРИЛАГАЕМАЯ К ТЕЛУ

Ускорение

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

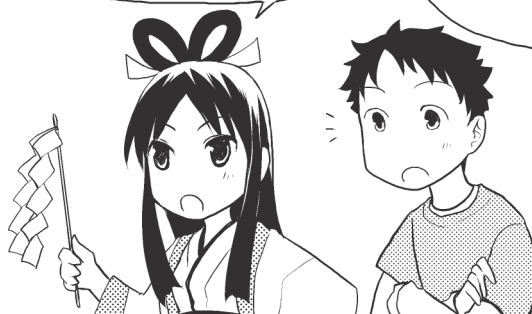
$$ma = F$$



$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F$$

ЕСЛИ ВЫРАЗИТЬ
УСКОРЕНИЕ ЧЕРЕЗ ИЗМЕНЕНИЕ
МЕСТОНАХОЖДЕНИЯ ОБЪЕКТА
В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВРЕМЕНИ,
ТО...

ВОТ И ПОЛУЧАЕМ
ФОРМУЛУ, КОТОРАЯ
СОДЕРЖИТ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ!



ДРУГИМИ СЛОВАМИ,
МЫ ВЫРАЗИЛИ С ПОМОЩЬЮ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ЗАКОН
ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА!

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F$$

ВЕДЬ ЕСЛИ В УРАВНЕНИЕ
ВХОДЯТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ,
ЭТО И ЕСТЬ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ
УРАВНЕНИЕ.

$$\frac{df}{dt} = 0$$

ВОТ ЭТА
ПРОСТЕНЬКО
ВЫГЛЯДЯЩАЯ
ФОРМУЛА -
НА САМОМ ДЕЛЕ
ПРЕКРАСНОЕ
ДИФФЕРЕН-
ЦИАЛЬНОЕ
УРАВНЕНИЕ!

э-э-э...

ВОТ ТАК ЛЕГКО МЫ
СМОДЕЛИРОВАЛИ
ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕРА!

И ТЕПЕРЬ С ПОМОЩЬЮ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ МЫ МОЖЕМ
ОПРЕДЕЛИТЬ
МЕСТОНАХОЖДЕНИЕ ПЛАНЕРА
И В ПРОШЛОМ, И В БУДУЩЕМ!

Полет



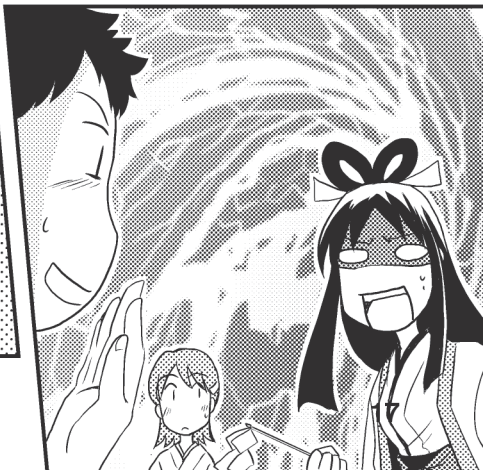
Модель (дифференциальное
уравнение)

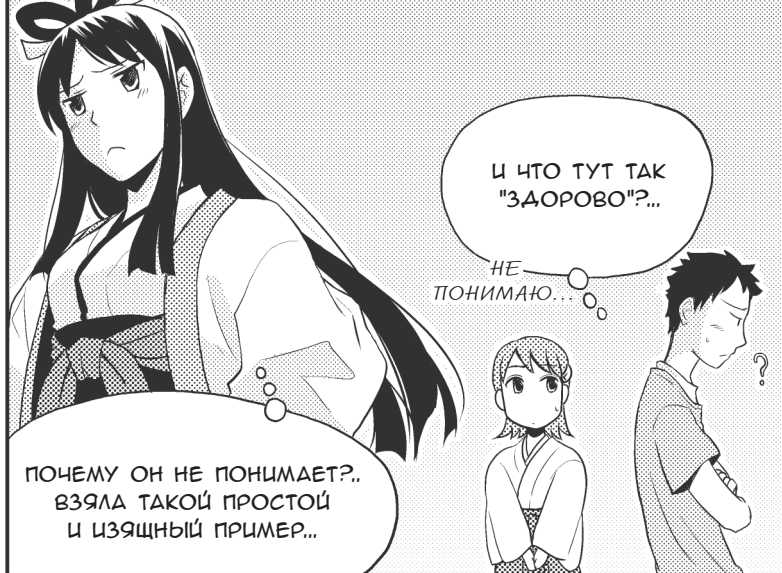
$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F$$

НУ КАК?
СКАЖИ, ЗАДОРОВО?!!

.....
.....

ХМ...
ПРАВДА?...







ТАК...
 m - ЭТО МАССА ТЕЛА...

ЧЕМУ ЖЕ
РАВНА МАССА?...

Эй!!

ЭТО ТЕБЕ
НЕ ОБЫЧНОЕ УРАВНЕНИЕ,
ЧТОБЫ РЕШАТЬ ЕГО,
ПОДАВЛЯЯ ЧИСЛА!!



В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ
УРАВНЕНИИ МЫ ДОЛЖНЫ
ПОЛУЧИТЬ В РЕЗУЛЬТАТЕ
НЕ ЧИСЛО, А ФОРМУЛУ!!!

АХ, ДА...



СЕЙЧАС, ЗНАЯ ФОРМУЛУ
ЗАКОНА ДВИЖЕНИЯ

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F,$$

МЫ ИЩЕМ
ФУНКЦИЮ $x(t)$.



ФУНКЦИЯ $x(t)$
ЕСТЬ ВНУТРИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ,

И ОНА
ПРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНА,
А ЗНАЧИТ, КАК МОЖНО
НАЙТИ ЕЕ САМУ?



ДА!!!

НУЖНО
ПРОИНТЕГРИ-
РОВАТЬ, ДА?!

ВЕРНО.



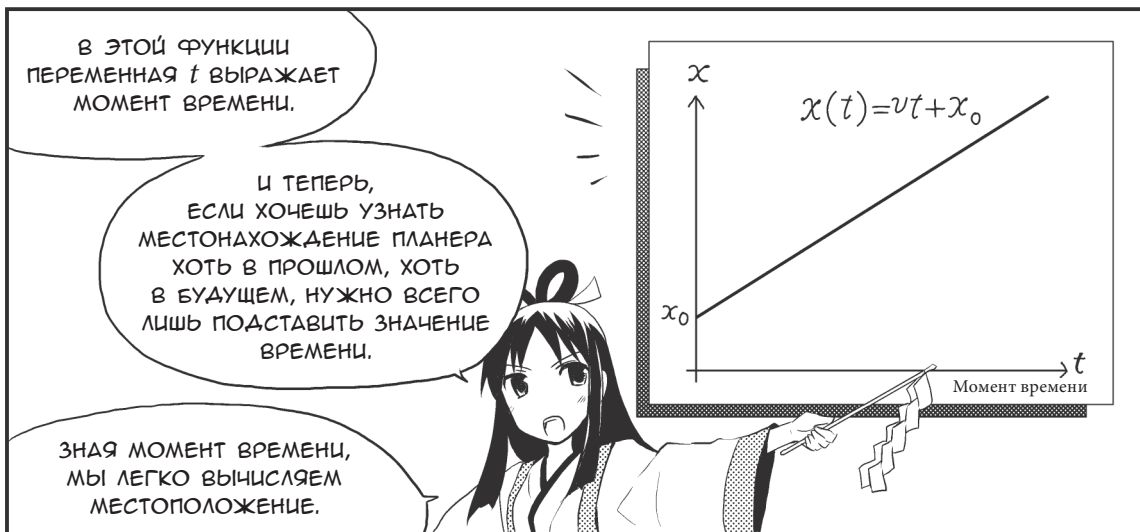
ИНТЕГРИРОВАНИЕ -
ЭТО ОБРАТНОЕ ДЕЙСТВИЕ.

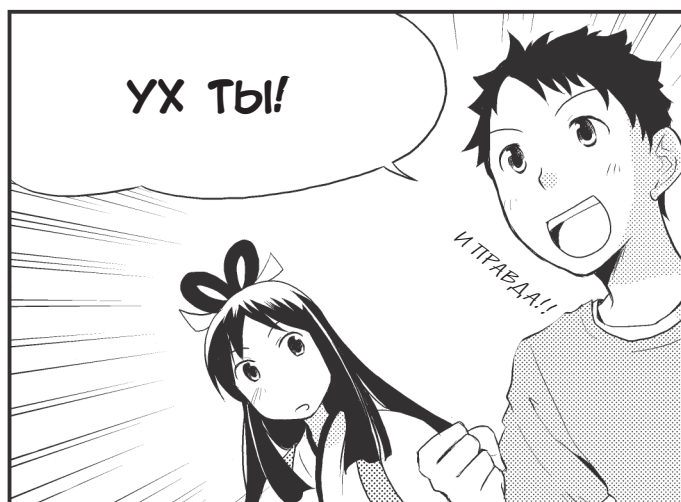
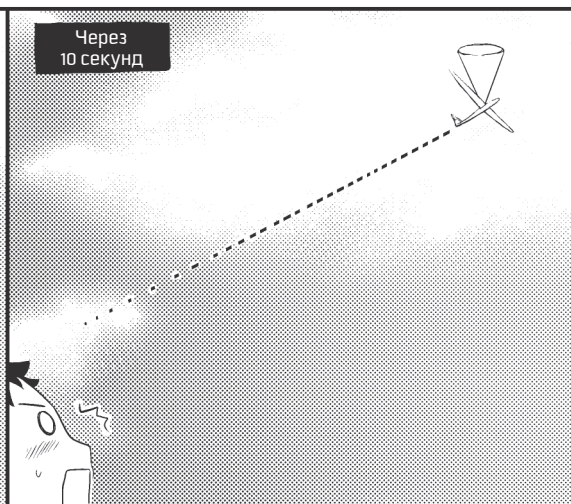
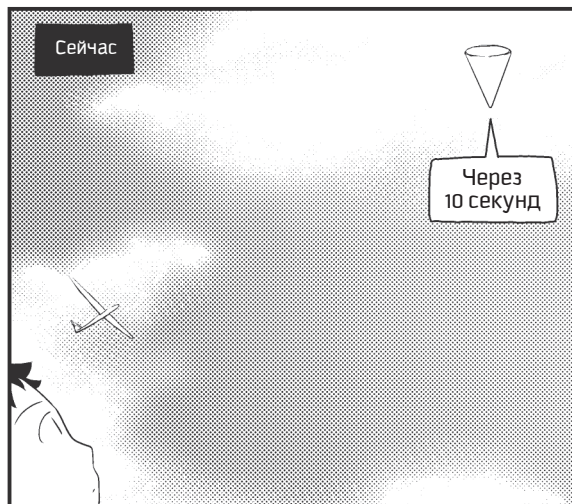
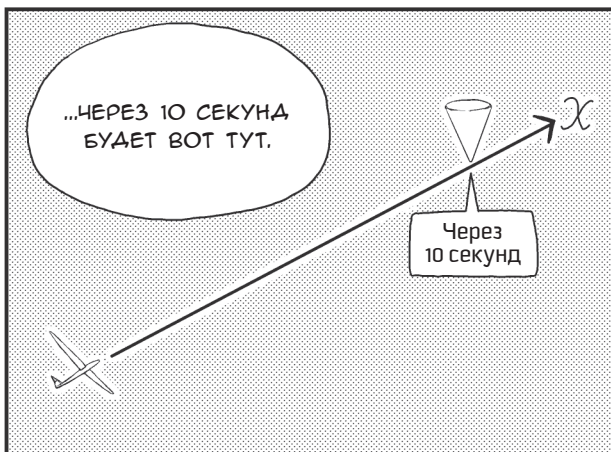
Обратные операции

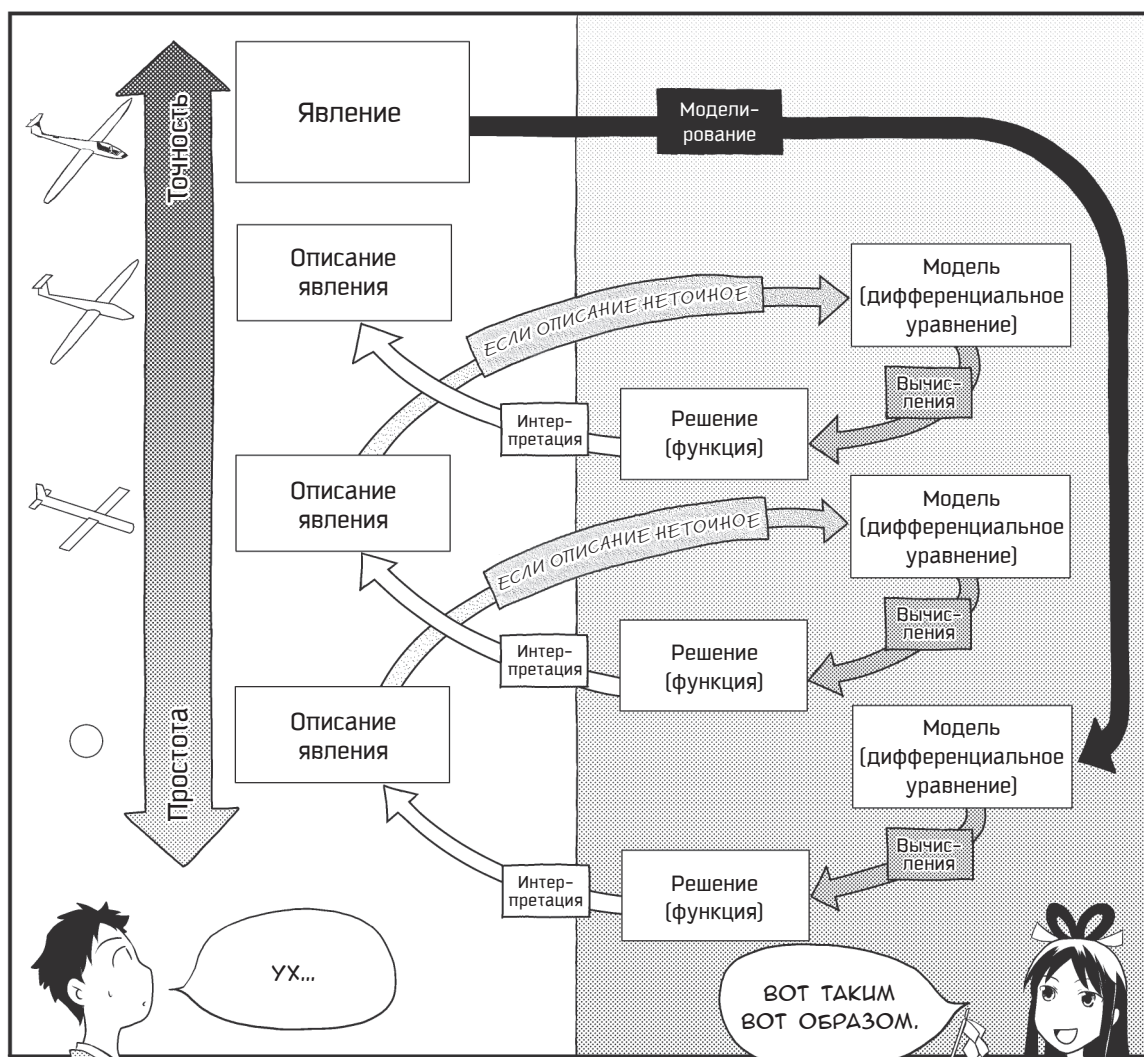
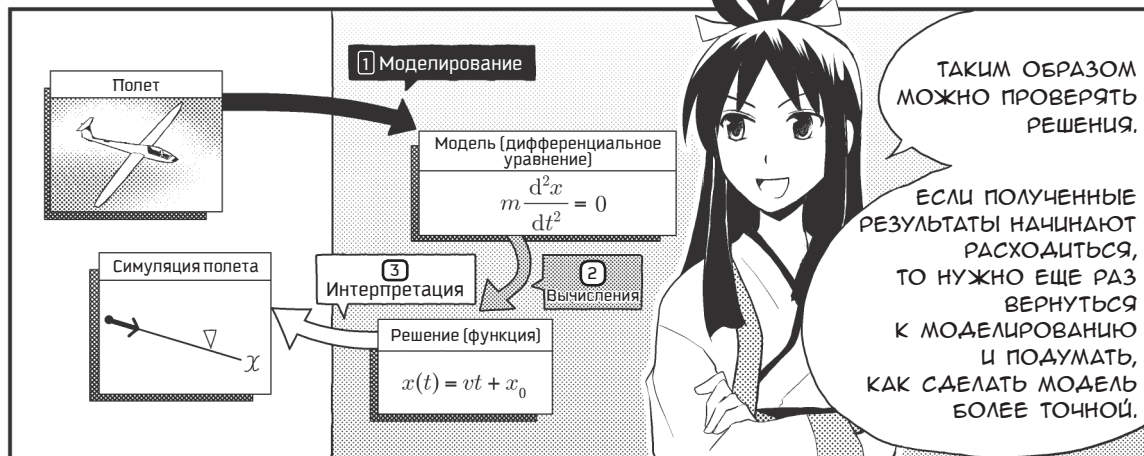
деление $\longleftrightarrow$ умножение

дифферен- $\longleftrightarrow$ интегриро-
цирование вание

ДЛЯ РЕШЕНИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ НАМ НУЖНО
ЗНАТЬ ИНТЕГРИРОВАНИЕ!

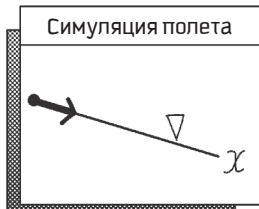






ОТ ТОГО, КАКОЙ ТОЧНОСТИ
МОДЕЛЬ ИСПОЛЬЗУЕТСЯ,
ЗАВИСИТ ТО, С КАКОГО
РАССТОЯНИЯ МЫ СМОТРИМ
НА ПЛАНЕР.

В ЭТОМ ПРИМЕРЕ
МЫ СМОТРЕЛИ ИЗДАЛЕКА,
НЕ УЧИТЫВАЯ ФОРМЫ
САМОГО ПЛАНЕРА,
А РАССМАТРИВАЯ ЕГО
ТОЛЬКО КАК ДВИЖУЩУЮСЯ
В ПРОСТРАНСТВЕ ТОЧКУ.

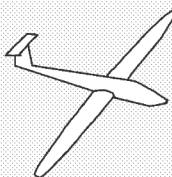


ПОЭТОМУ ЕСЛИ, НАПРИМЕР,
НАМ НУЖНО УЧЕСТЬ
ДВИЖЕНИЕ ВОЗДУХА ВОКРУГ
ПЛАНЕРА, ТО МОДЕЛЬ СТАНЕТ
БОЛЕЕ СЛОЖНОЙ
И ДЕТАЛЬНОЙ.

ЭТО ЗАЧЕМ?

ЗАТЕМ, ЧТО МЫ
НЕ МОЖЕМ
ИГНОРИРОВАТЬ
ФОРМУ АППАРАТА.

Симуляция полета



А-А-А...

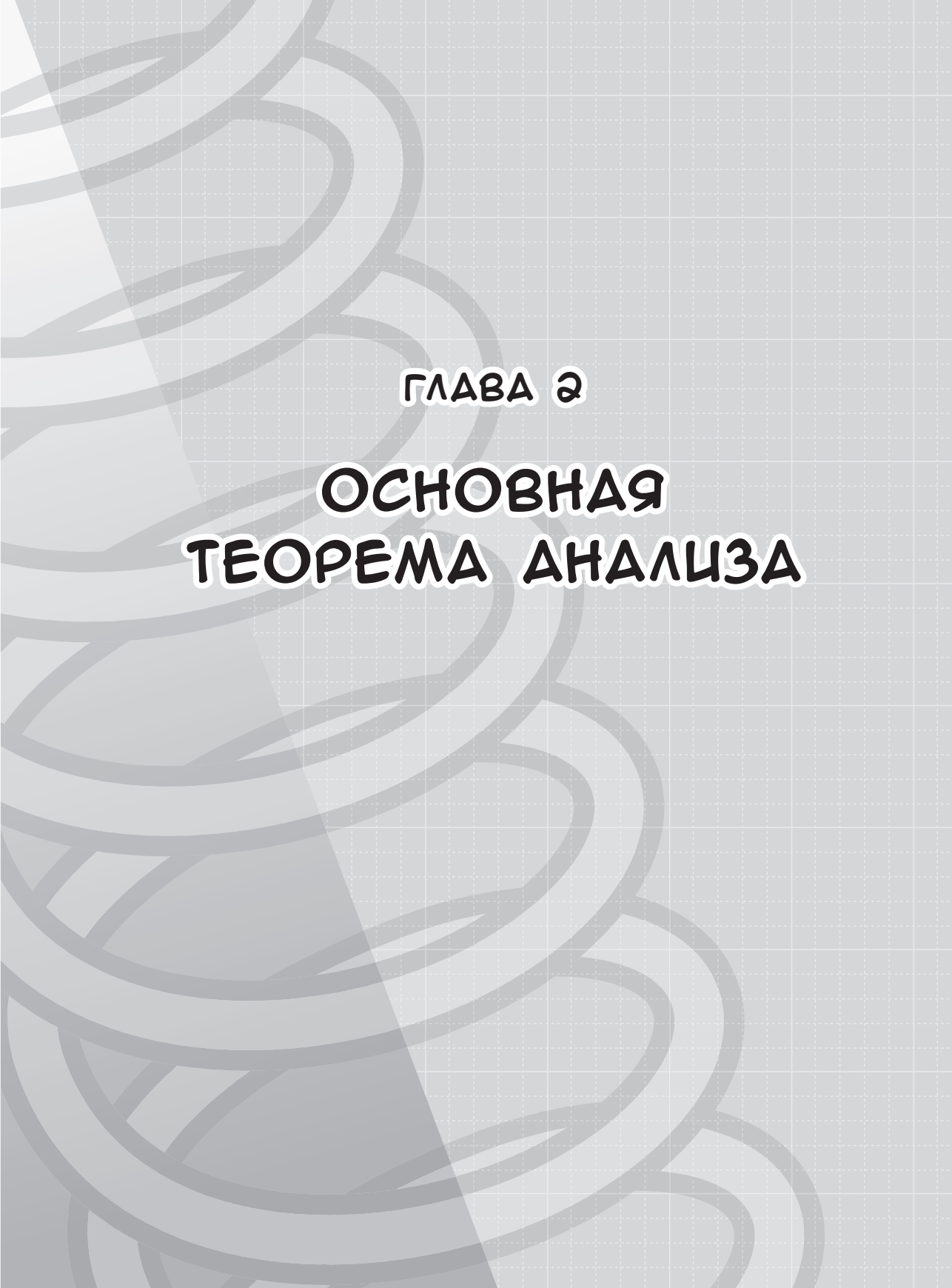
СЛОЖНОВАТО...

МОДЕЛИРОВАНИЕ -
ЭТО ПРАКТИКА.

ТУТ НЕОБХОДИМ ГЛАЗ,
СПОСОБНЫЙ КАК СЛЕДУЕТ
НАБЛЮДАТЬ ЗА ЯВЛЕНИЕМ
В РЕАЛЬНОМ МИРЕ...

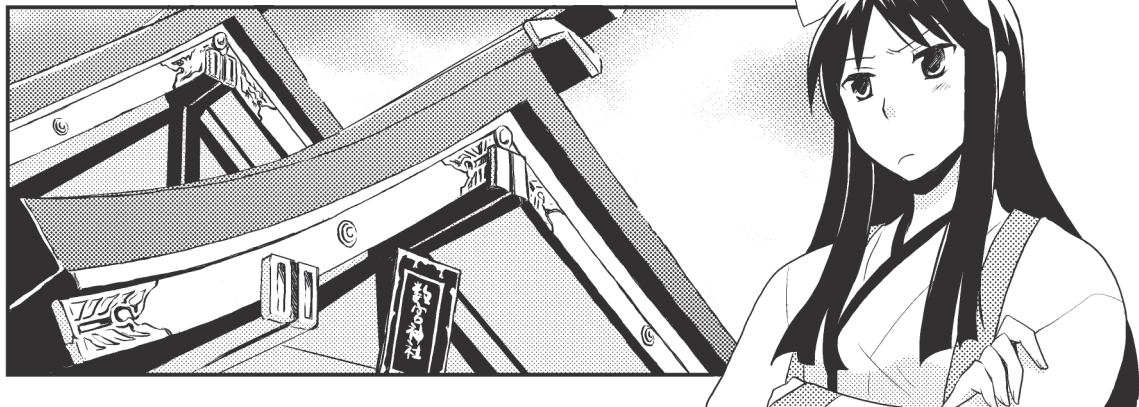
...И ЗНАНИЯ,
ПОЗВОЛЯЮЩИЕ ОПРЕДЕЛИТЬ,
КАКУЮ МОДЕЛЬ НУЖНО
ИСПОЛЬЗОВАТЬ, ЧТОБЫ
ПОЛУЧИТЬ НЕОБХОДИМЫЙ
РЕЗУЛЬТАТ!

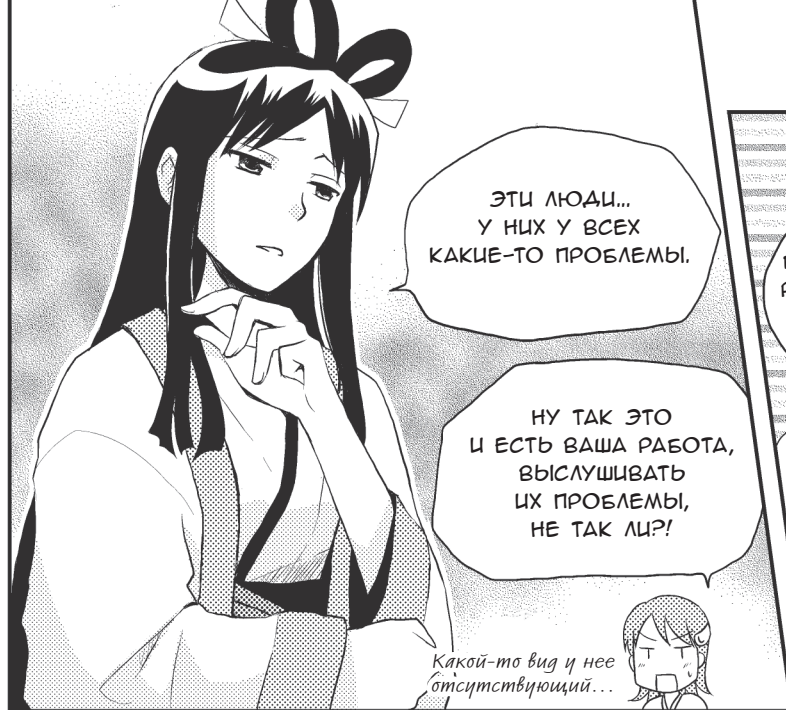


The background features a light gray grid pattern. On the left side, there is a large, stylized, gray spiral shape that resembles a nautilus shell or a stylized 'S' curve, partially overlapping the grid.

ГЛАВА 2

**ОСНОВНАЯ
ТЕОРЕМА АНАЛИЗА**





ЭТИ ЛЮДИ...
У НИХ У ВСЕХ
КАКИЕ-ТО ПРОБЛЕМЫ.

НУ ТАК ЭТО
И ЕСТЬ ВАША РАБОТА,
ВЫСЛУШИВАТЬ
ИХ ПРОБЛЕМЫ,
НЕ ТАК ЛИ?!

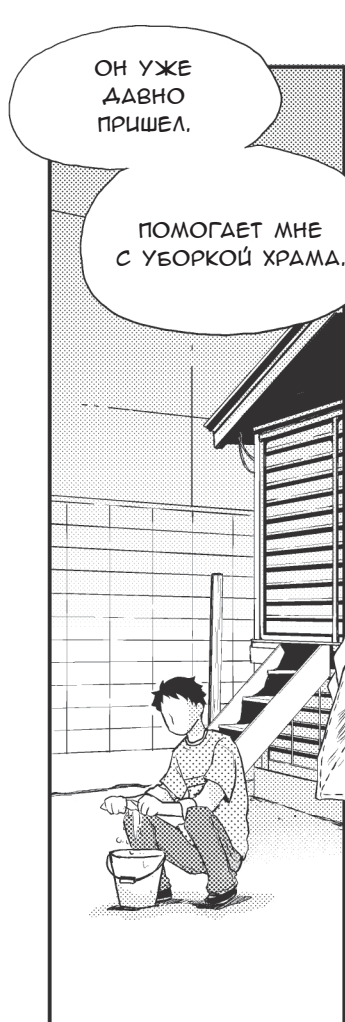
Какой-то вид у нее
отсутствующий...



ОДНАКО,
ГДЕ ЖЕ
ЭТОТ ПАРЕНЬ?

НАДО
БЫСТРЕНЬКО СО ВСЕМ
РАЗОБРАТЬСЯ И ПОЙТИ,
НАКОНЕЦ, В ТУР ПО
КОНДИТЕРСКИМ!

ВЫ
О ГОСПОДИНЕ
ДАИЧИ?



ОН УЖЕ
ДАВНО
ПРИШЕЛ.

ПОМОГАЕТ МНЕ
С УБОРКОЙ ХРАМА.

А!



ГОСПОЖА БОГИНЯ,
ДОБРЫЙ ДЕНЬ!

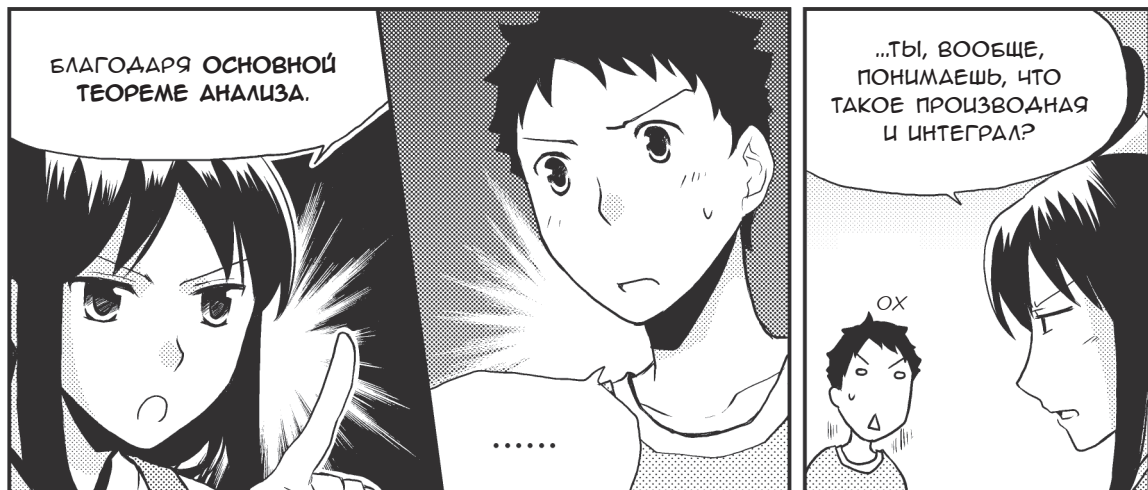
...ХМ.
ТАКОЙ ВСЕГДА
ИЗ СЕБЯ
ХОРОШИЙ.

?



НУ, ДАВАЙ СКОРЕЕ
ПРОДОЛЖАТЬ!





1. ФУНКЦИИ, ПЕРЕМЕННЫЕ И ГРАФИКИ

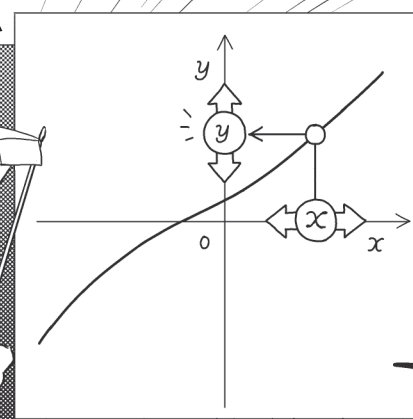
ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ИСПОЛЗУЮТСЯ ФУНКЦИИ, ТАК ЖЕ КАК Я ИСПОЛЬЗОВАЛА В ОБЪЯСНЕНИИ НАКАНУНЕ.

ЕСЛИ КОРОТКО, ТО ФУНКЦИЯ ПОКАЗЫВАЕТ ЗАВИСИМОСТЬ ОДНОГО ПАРАМЕТРА (y) ОТ ДРУГОГО (x).

ТО ЕСТЬ ЕСЛИ МЫ ЗНАЕМ x , ТО ПО КАКОМУ-ТО ПРАВИЛУ

МЫ МОЖЕМ НАЙТИ И y .

ВАМ



Ну, это же божиня, и не такое имеет

Откуда вдруг все это появляется?

ДЛЯ ОБОЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ЧАСТО ИСПОЛЗУЕТСЯ БУКВА f (FUNCTION).

ОДНАКО В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ И ДРУГИЕ БУКВЫ ТОЖЕ ЧАСТО ИСПОЛЗУЮТСЯ.

БУКВОЙ v ОБОЗНАЧАЮТ СКОРОСТЬ (ОТ СЛОВА VELOCITY), А БУКВОЙ T - ТЕМПЕРАТУРУ (ОТ TEMPERATURE),

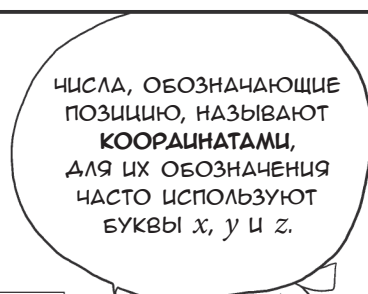
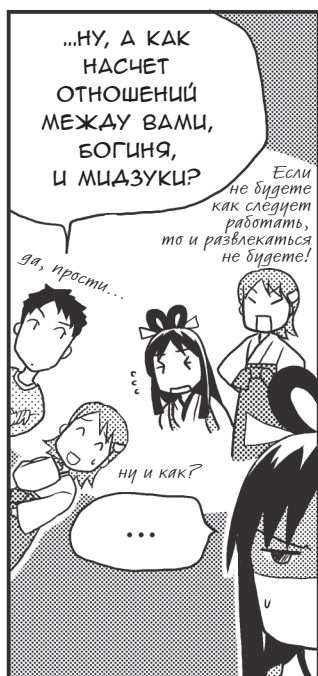
ТАКИМ ОБРАЗОМ ДАЮТСЯ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ОТРАЖАЮЩИЕ СМЫСЛ ПАРАМЕТРА.

ВОТ ОНО ЧТО!

Теперь все понятно









ТАКИМ ОБРАЗОМ,
ИСПОЛЬЗУЯ ОБОЗНАЧЕНИЕ
ФУНКЦИИ, ОТНОШЕНИЯ
"ХОЗЯИН-СЛУГА" МЕЖДУ
ПЕРЕМЕННЫМИ,

$$x = f(t)$$

МЫ МОЖЕМ
ЗАПИСАТЬ ВОТ ТАКИМ
ВОТ ОБРАЗОМ.

ЕСЛИ ВСТАВИМ ЗНАЧЕНИЕ
ВРЕМЕНИ, ПОЛУЧИМ
ЗНАЧЕНИЕ
МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ.
ПОЭТОМУ f МОЖЕМ
ЗАМЕНИТЬ НА x ...

$$x = x(t)$$

...И ВОТ ЧТО
ПОЛУЧИМ.

ПОПРОБУЮ ТЕПЕРЬ
ОТОБРАЗИТЬ ДВИЖЕНИЕ
ПЛАНЕРА.

ТАК...
ПЛАНЕР ЛЕТИТ СО
СКОРОСТЬЮ 25 М/С,
ТО ЕСТЬ ЕСЛИ x -
ЭТО МЕТРЫ, А t -
СЕКУНДЫ,

ТО ПОЛУЧАЕМ
 $x(t) = 25t$,
ВЕРНО?

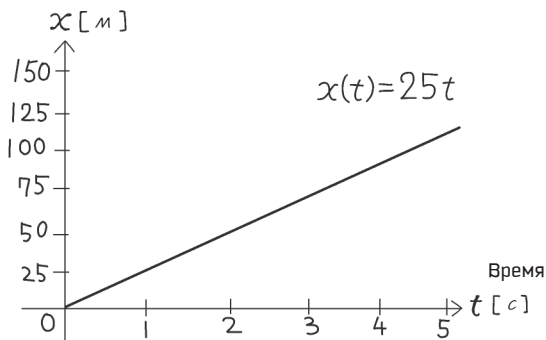
ПРАВИЛЬНО!

И ЕСЛИ ГРАФИЧЕСКИ
ИЗОБРАЗИТЬ ЗАВИСИМОСТЬ
МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ
ПЛАНЕРА ОТ ВРЕМЕНИ...

ПОЛУЧИТСЯ
ВОТ ТАКАЯ ПРЯМАЯ.

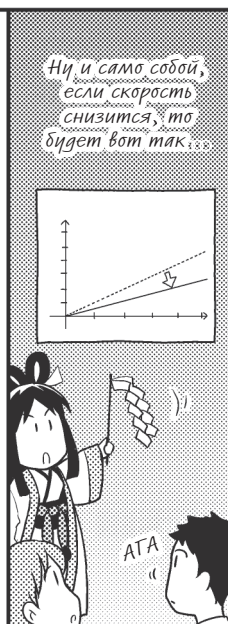
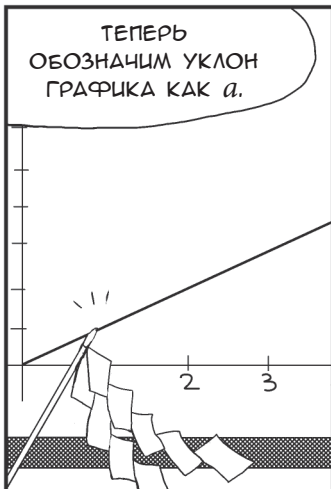
ЭТОТ ГРАФИК
ПОКАЗЫВАЕТ
ФУНКЦИЮ $x(t)$, КОТОРАЯ
И ОТОБРАЖАЕТ
ЗАВИСИМОСТЬ
МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ
ПЛАНЕРА x
ОТ ВРЕМЕНИ t .

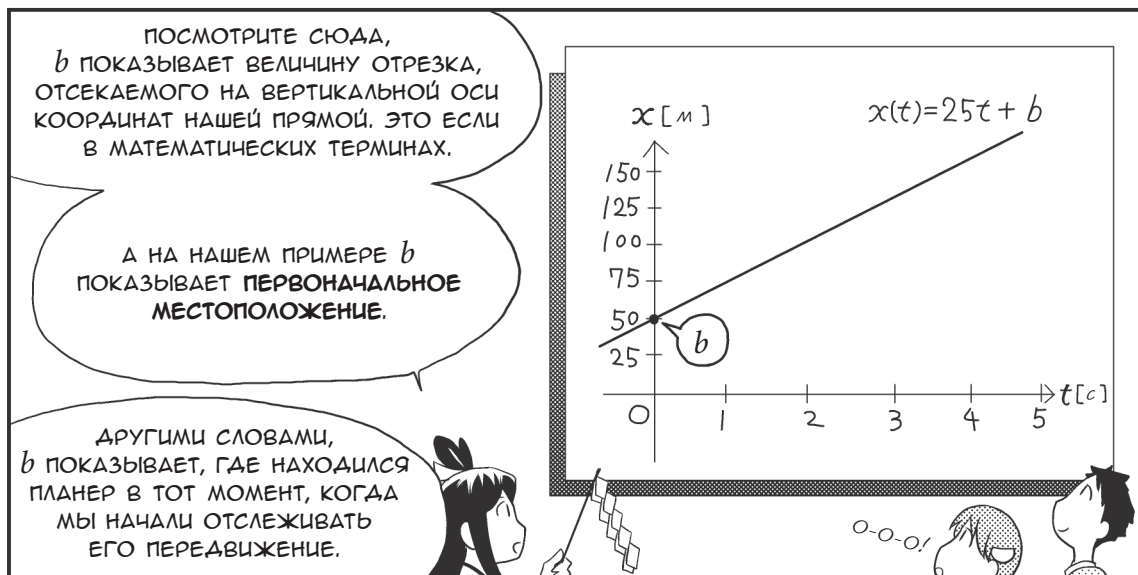
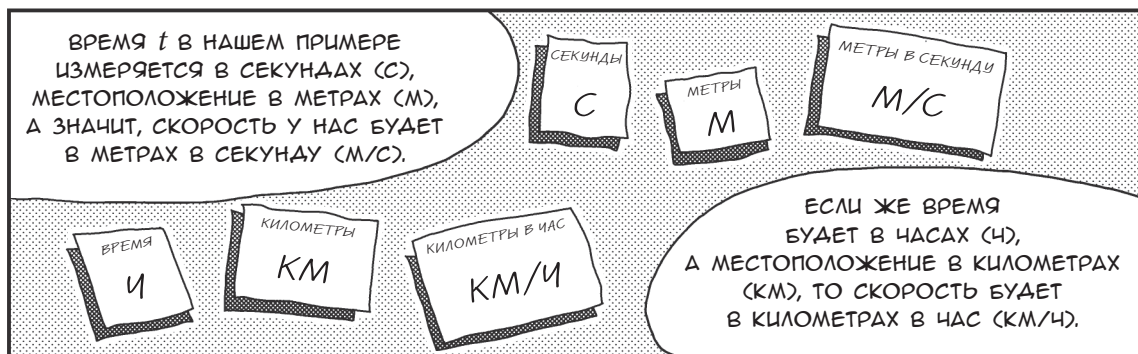
Местоположение планера



ЕСЛИ НАРИСОВАТЬ
ГРАФИК, ТО
С ОДНОГО ВЗГЛЯДА
ВСЕ СТАНОВИТСЯ
ПОНЯТНО...

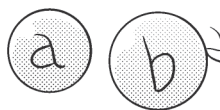
ПРИ ДВИЖЕНИИ
ИЗ ПРОШЛОГО В БУДУЩЕ
НА КАЖДУЮ СЕКУНДУ
ВРЕМЕНИ МЕСТОПОЛОЖЕНИЕ
ПЛАНЕРА УДАЛЯЕТСЯ НА 25 М.





ЕСЛИ ВЫРАЗИТЬ НАКЛОН
ПРЯМОЙ И ОТСЕКАЕМЫЙ
НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСИ
ОТРЕЗОК

НЕ КОНКРЕТНЫМИ
ЦИФРАМИ, А БУКВАМИ,
ТО МЫ ПОЛУЧИМ БОЛЕЕ
УНИВЕРСАЛЬНУЮ
ФОРМУЛУ:
 $x = at + b$.



ЧТОБЫ ПЕРЕЙТИ
В МИР МАТЕМАТИКИ,
СЛЕДУЕТ НАУЧИТЬСЯ
ОБООБЩАТЬ.

ОБООБЩАТЬ?

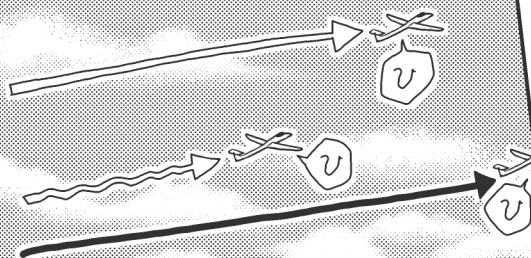


ДА, ПОТОМУ ЧТО
ЭТО ВЫГОДНО.

НАПРИМЕР,
ЕСЛИ МЫ ЗАПИШЕМ
СКОРОСТЬ ПЛАНЕРА КАК
25 М/С, ТО ТАК МЫ СМОЖЕМ
ОПИСАТЬ ТОЛЬКО ОДИН
ВАРИАНТ ЕГО ДВИЖЕНИЯ.



ОДНАКО ЕСЛИ МЫ
ОБОЗНАЧИМ СКОРОСТЬ
БУКВОЙ v , ТО ТАК МЫ
СМОЖЕМ ВЫРАЗИТЬ
ЛЮБОЕ ЗНАЧЕНИЕ
СКОРОСТИ!



И НЕ ТОЛЬКО ЭТО!
И СКОРОСТЬ ПЛАНЕРА,
И СКОРОСТЬ МАШИНЫ,
И СКОРОСТЬ ВЕЛОСИПЕДА,
И ДАЖЕ, НАПРИМЕР,
ПОЧАСОВАЯ ЗАРПЛАТА
НА РАЗНЫХ РАБОТАХ -

В МИРЕ МАТЕМАТИКИ
МОГУТ ОБОЗНАЧАТЬСЯ
ОДИНАКОВО И ИМЕТЬ
ОДИНАКОВЫЕ СВОЙСТВА!

И ЭТО ОДНО
ИЗ ДОСТОИНСТВ
МАТЕМАТИКИ!

В МИРЕ МАТЕМАТИКИ НЕ НУЖНО КАЖДЫЙ РАЗ ВЫЯСНЯТЬ,

ЧТО ПЕРВОНАЧАЛЬНО ОБОЗНАЧАЛА КАЖДАЯ ПЕРЕМЕННАЯ.

a

$v = \frac{dx}{dt}$

t

$x = f(t)$

b

ДОСТАТОЧНО ПРОСТО СЛЕДОВАТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ЗАКОНАМ.

Реальный мир

Планер

Мир математики

Модель

Переменные

Вычисления

А КОГДА НУЖНО ОБЪЯСНИТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПРИМЕНТЕЛЬНО К РЕАЛЬНОМУ МИРУ, ТОГДА НЕОБХОДИМО ВЕРНУТЬ ПЕРЕМЕННЫМ КОНКРЕТНОСТЬ...

Смоделированный планер

...и вспомнить, что выражает КАЖДАЯ ИЗ НИХ.

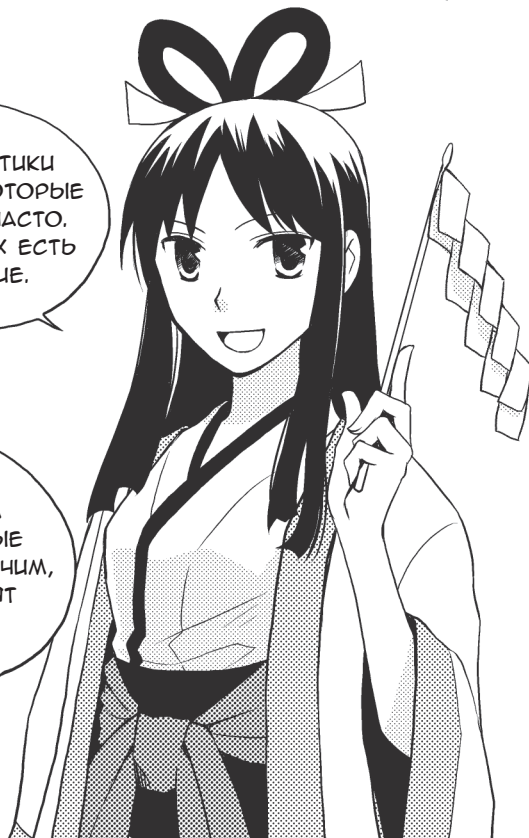
ВОТ ОНО ЧТО.

МНЕ КАЖЕТСЯ, Я ТЕПЕРЬ ПОНЯЛ, ЗАЧЕМ НУЖНО МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ...

ИДЕМ ДАЛЬШЕ.

В МИРЕ МАТЕМАТИКИ ЕСТЬ ФУНКЦИИ, КОТОРЫЕ ИСПОЛЗУЮТСЯ ЧАСТО. У КАЖДОЙ ИЗ НИХ ЕСТЬ СВОЕ НАЗВАНИЕ.

МЫ РАССМОТРИМ САМЫЕ ПОПУЛЯРНЫЕ ИЗ НИХ. А ТАКЖЕ ИЗУЧИМ, КАК ОНИ ВЫГЛЯДЯТ ГРАФИЧЕСКИ.



■ Экспоненциальные функции



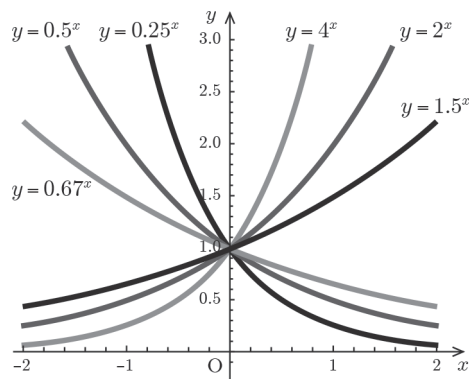
Моноotonно возрастающая или моноotonно убывающая

Если a – это константа, то функция вида

$$y(x) = ax$$

называется экспоненциальной.

Как ведут себя экспоненциальные функции, показано на картинке справа.



Функция будет экспоненциальной при любом значении a , но в дифференциальных уравнениях нам особенно важно следующее значение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281828459045235 \dots$$

Подставив это значение, называемое e , мы получаем функцию:

$$y(x) = e^x.$$

Представленное здесь число e называют также **числом Непера**.

Далее представлены основные свойства экспоненциальных функций:

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

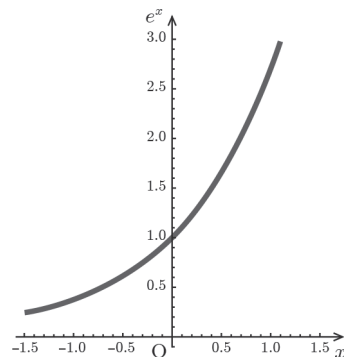


График функции e^x

■ Логарифмические функции



Постоянно возрастающая или убывающая с постепенно замедляющимся темпом

Функция, обратная экспоненциальной функции, называется логарифмической.

Другими словами, если, преобразуя следующую формулу:

$$x = a^y,$$

мы напомним формулу для нахождения y :

$$y(x) = \log_a x,$$

то как раз получим логарифмическую функцию.

Как ведут себя логарифмические функции, показано на картинке справа.

Константа a здесь называется основанием логарифма. Если a равно 10, то такой логарифм $\log_{10} x$ называется десятичным, если же a равно e , то такой логарифм $\log_e x$ называется натуральным.

В работе с дифференциальными уравнениями нам чаще всего будут нужны именно натуральные логарифмы. Натуральные логарифмы упрощенно записываются вот так:

$$y(x) = \ln x.$$

А основные свойства логарифмов:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^y = y \log_a x, \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

выглядят вот так.

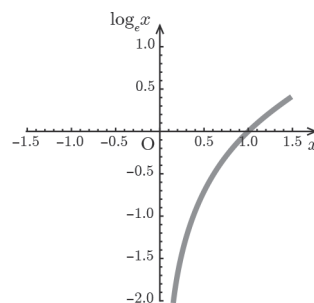
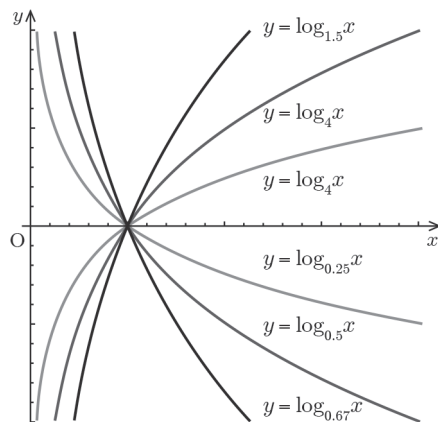


График функции $\log_e x$

■ Тригонометрические функции



То возрастают, то убывают

Выраженные следующим образом соотношения сторон и угла прямоугольного треугольника (смотрите картинку ниже):

$$\sin x = \frac{c}{a}, \quad \cos x = \frac{b}{a}$$

определяют тригонометрические функции. Эти функции являются периодическими с периодом, равным 2π . Поэтому они часто используются для моделирования периодически повторяющихся процессов.

А из теоремы Пифагора получаем следующее равенство¹:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

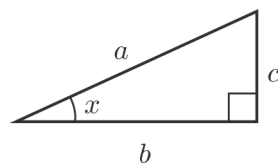
Если же теперь мы обозначим:

$$p = \cos x, \quad q = \sin x,$$

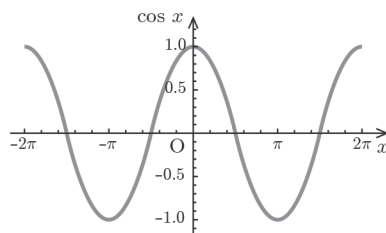
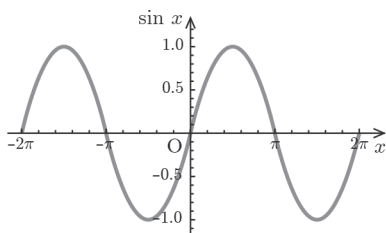
то получим равенство:

$$p^2 + q^2 = 1,$$

и в этом случае p и q будут соответствовать координатам окружности с радиусом 1 на плоскости.



Стороны и углы
прямоугольного
треугольника



Графики тригонометрических функций. Слева $\sin x$, справа $\cos x$

¹ Используя формулу Эйлера можем записать так: $\cos^2 x + \sin^2 x = ((e^{ix} + e^{-ix})/2)^2 + ((e^{ix} - e^{-ix})/2i)^2 = (e^{2ix} + e^{-2ix} + 2)/4 - (e^{2ix} + e^{-2ix} - 2)/4 = 1$.

■ Гиперболические функции



Их свойства похожи на свойства тригонометрических функций

Хотя с первого взгляда кажется, что экспоненциальная и тригонометрическая функции никак между собой не связаны, но, исходя из формулы Эйлера²

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x,$$

оказывается, что благодаря комплексным числам между ними существует неразрывная связь. Если использовать формулу Эйлера вот так:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

то эта связь становится очевидной. Функции, которые определяются формулами, очень похожими на предыдущие, называются гиперболическими.

Вот эти формулы гиперболических функций:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

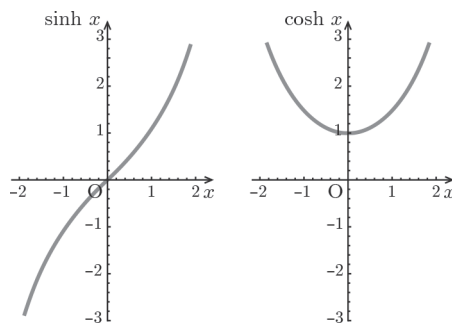
Они проиллюстрированы на картинке справа.

Преобразуем формулу и вот что получаем:

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = 1. \end{aligned}$$

Если теперь мы обозначим $p = \cosh x$, а $q = \sinh x$, то получим, что $p^2 - q^2 = 1$.

А p и q будут соответствовать координатам гиперболы на плоскости. Поэтому $\cosh$ называется **гиперболическим косинусом**, а $\sinh$ – **гиперболическим синусом** (у нас они чаще обозначаются как ch и как sh). Но хотя названия и похожи на тригонометрические функции, и некоторые общие свойства у функций есть, но все-таки эти функции совсем разные.

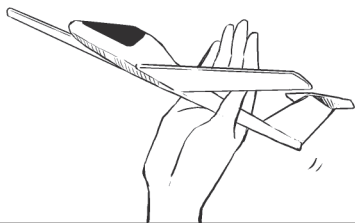


Графики гиперболических функций. Слева функции – $\sinh x$, справа – $\cosh x$

² Экспоненциальную и тригонометрическую функции каждую по отдельности можно разложить в ряд. И тогда в случае, если $x = \pi$, получаем мистическую формулу $e^{i\pi} + 1 = 0$, которая связывает между собой числа e , π , 1 , i и 0 . Это удивительно, что если иррациональное число e возвести в степень иррационального числа π , умноженного на мнимую единицу i , и прибавить к полученному результату 1 , то в итоге получим значение 0 .

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

ДО ЭТОГО МЫ СЧИТАЛИ,
ЧТО СКОРОСТЬ ПЛАНЕРА
ПОСТОЯННАЯ.



НО ВЕДЬ
В ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТИ
ОН МОЖЕТ ТО
УСКОРЯТЬСЯ, ТО
ЗАМЕДЛЯТЬСЯ, ТАК?

УГУ.



В РЕАЛЬНОМ МИРЕ
НЕ СУЩЕСТВУЕТ
ТАКОГО ПЛАНЕРА,
КОТОРЫЙ МОГ БЫ
ЛЕТЕТЬ С ПОСТОЯННОЙ
СКОРОСТЬЮ.

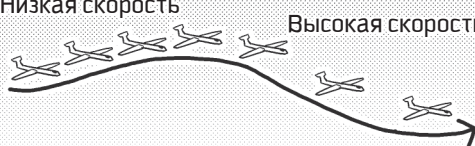


Постоянная скорость



Низкая скорость

Высокая скорость



АА,
ДЕЙСТВИТЕЛЬНО!



ПОТОМУ ЧТО
В ТАКОМ СЛУЧАЕ
ОН НЕ МОГ БЫ
НИ ВЗЛЕТЕТЬ,
НИ ПРИЗЕМЛИТЬСЯ.



ПОЭТОМУ, ЧТОБЫ ПРИБЛИЗИТЬ
МОДЕЛЬ К РЕАЛЬНОСТИ,
НУЖНО УЧИТЫВАТЬ, ЧТО
ОБЪЕКТ ДВИЖЕТСЯ
ПО-РАЗНОМУ.

РАССМОТРИМ СИТУАЦИЮ,
КОГДА МАРШРУТ ПОЛЕТА
ПРОХОДИТ ПО ПРЯМОЙ,
А СКОРОСТЬ МЕНЯЕТСЯ.

ПОНЯТНО.



НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОСИ
ОТМЕЧАЕМ ВРЕМЯ t ,
НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСИ
МЕСТОПОЛОЖЕНИЕ ПЛАНЕРА x ,
И ПОЛУЧАЕМ ВОТ ТАКИЕ КРИВЫЕ.



Тут прям
как пьяный

И КАК ЖЕ НАМ ТЕПЕРЬ
ВЫРАЗИТЬ СКОРОСТЬ
ПЛАНЕРА, ЕСЛИ ОНА
МЕНЯЕТСЯ?

СКОРОСТЬ ВЫРАЖАЕТСЯ
НАКЛОНОМ ГРАФИКА,
ТО ЕСТЬ ЕЕ МОЖНО
РАССЧИТАТЬ КАК УГЛОВОЙ
КОЭФФИЦИЕНТ ($\Delta x / \Delta t$).

ХМММ...

НО...

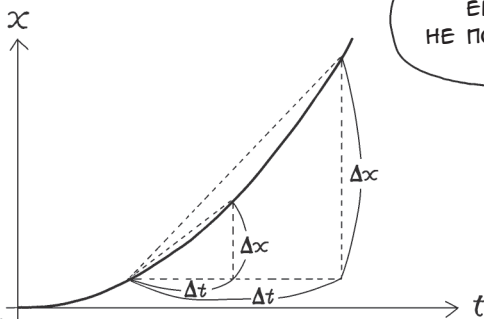
В КАКОМ ЖЕ
МЕСТЕ МЫ БУДЕМ
СЧИТАТЬ ЭТОТ
КОЭФФИЦИЕНТ?

ООО!

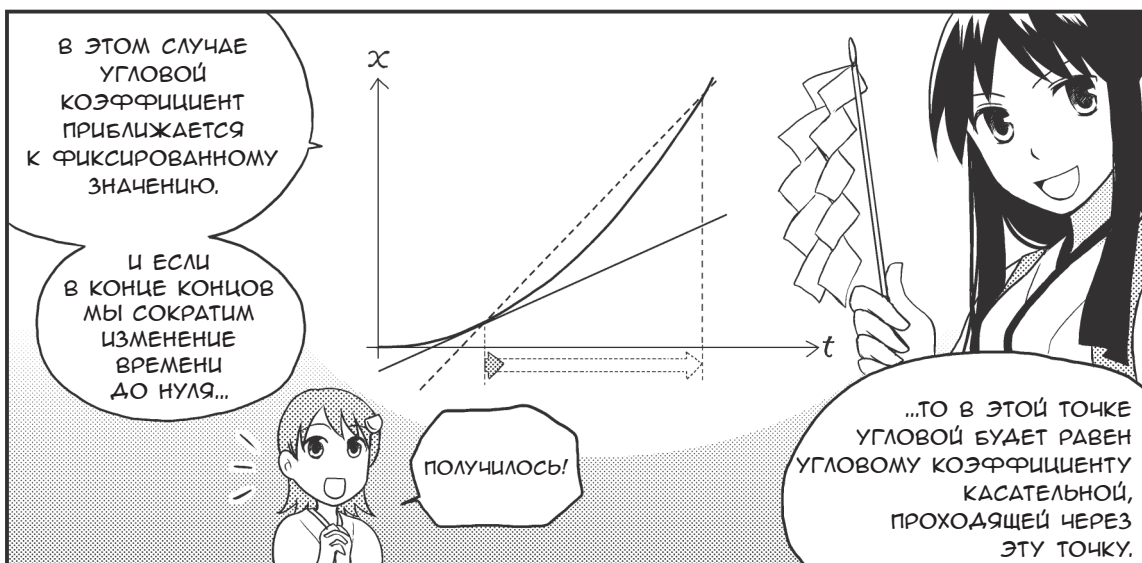
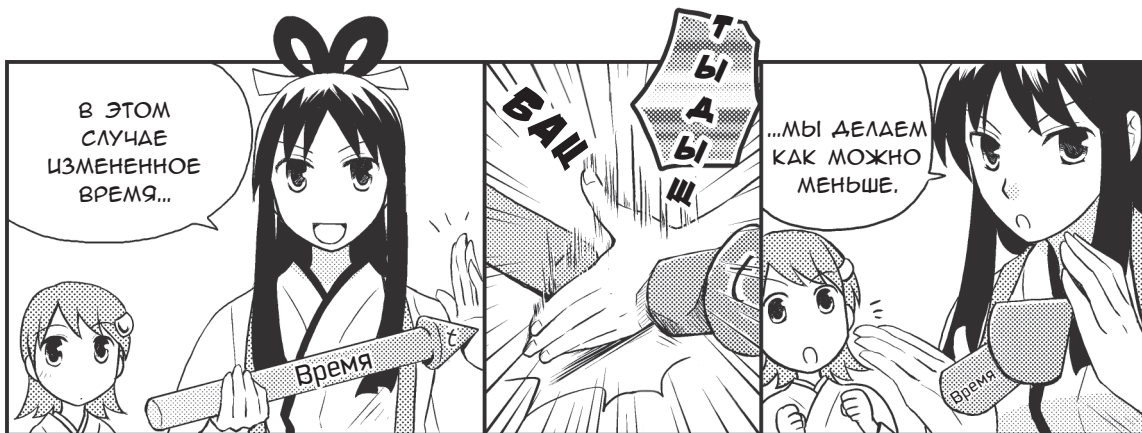
ОТЛИЧНО
ПОДМЕЧЕНО!!

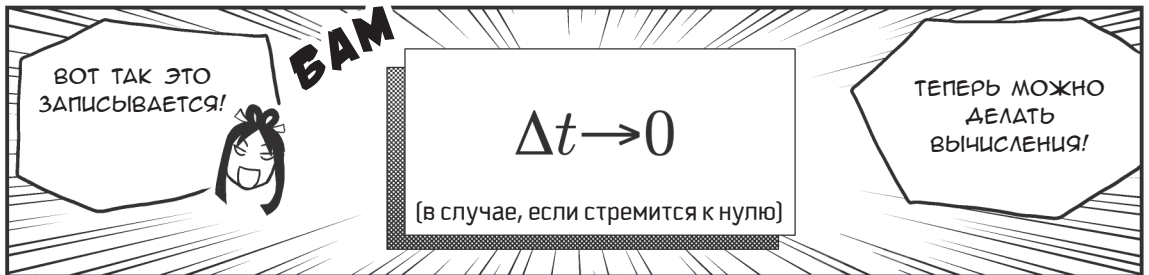
КОГДА СКОРОСТЬ БЫЛА
НЕИЗМЕННОЙ И ГРАФИК
БЫЛ ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ,
ВСЕ БЫЛО ПРОСТО.

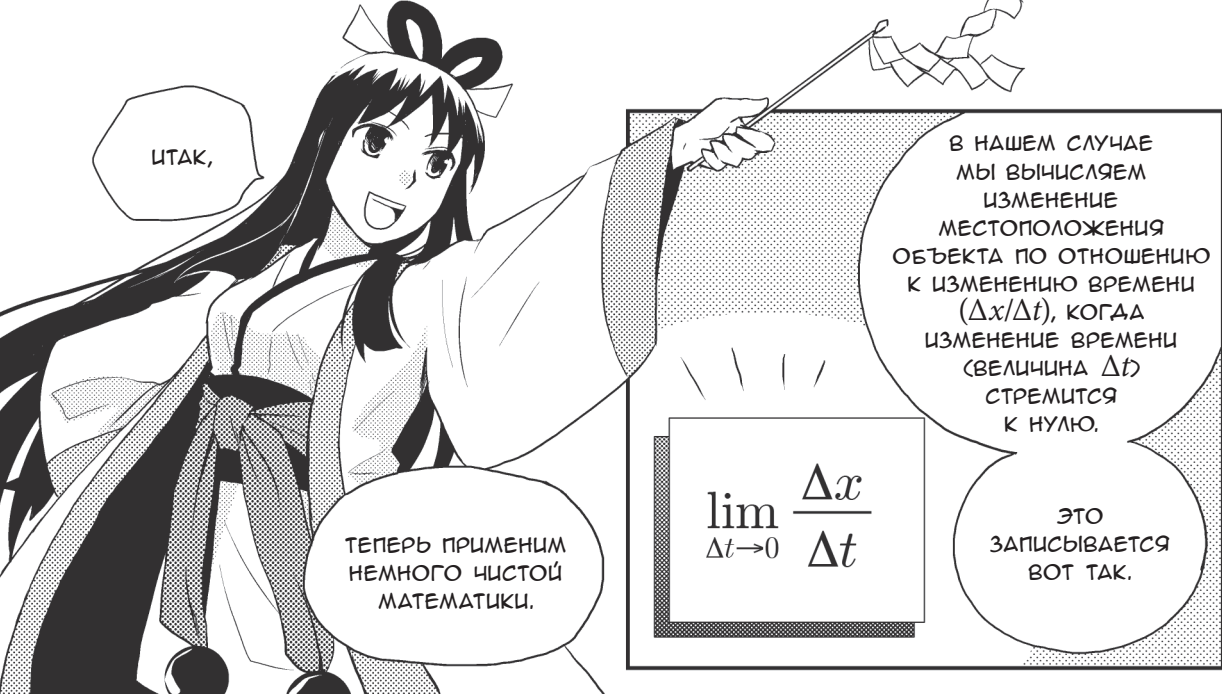
НО КОГДА СКОРОСТЬ
МЕНЯЕТСЯ И ГРАФИК
СТАНОВИТСЯ КРИВОЙ,
ТО УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ
ТОЖЕ МЕНЯЕТСЯ
ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ВРЕМЕНИ.



ТО ЕСТЬ
ЕГО ЗНАЧЕНИЕ
НЕ ПОСТОЯННО, ТАК?







ИТАК,

ТЕПЕРЬ ПРИМЕНИМ
НЕМНОГО ЧИСТОЙ
МАТЕМАТИКИ.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

В НАШЕМ СЛУЧАЕ
МЫ ВЫЧИСЛЯЕМ
ИЗМЕНЕНИЕ
МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ
ОБЪЕКТА ПО ОТНОШЕНИЮ
К ИЗМЕНЕНИЮ ВРЕМЕНИ
($\Delta x / \Delta t$), КОГДА
ИЗМЕНЕНИЕ ВРЕМЕНИ
(ВЕЛИЧИНА Δt)
СТРЕМИТСЯ
К НУЛЮ.

ЭТО
ЗАПИСЫВАЕТСЯ
ВОТ ТАК.

ВОТ ЭТО
ОБОЗНАЧЕНИЕ $\lim$
ПЕРЕД ДРОБЬЮ

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$$

ПРОИСХОДИТ
ОТ СЛОВА limit
И ОБОЗНАЧАЕТ
ПРЕДЕЛ.

КРОМЕ ТОГО, ИЗМЕНЕНИЕ
МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ (Δx)
ПОКАЗЫВАЕТ, НА СКОЛЬКО
ПРОВАДНИУЛСЯ ОБЪЕКТ
С МОМЕНТА ВРЕМЕНИ t
ДО МОМЕНТА ВРЕМЕНИ
 $t + \Delta t$.

Изменение местоположения
относительно времени

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$

ИСПОЛЬЗУЯ
ФУНКЦИЮ ЗАВИСИМОСТИ
МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ
ОТ ВРЕМЕНИ $x(t)$...

...МЫ ПОЛУЧАЕМ
ВОТ ТАКОЕ
УРАВНЕНИЕ.

И ЕСЛИ ТЕПЕРЬ В ФОРМУЛЕ
ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛА
ФУНКЦИИ МЫ ЗАМЕНИМ
ИЗМЕНЕНИЕ
МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ (Δx)
НА ЭТО ВЫРАЖЕНИЕ...

Изменение времени (Δt) стремится к нулю

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

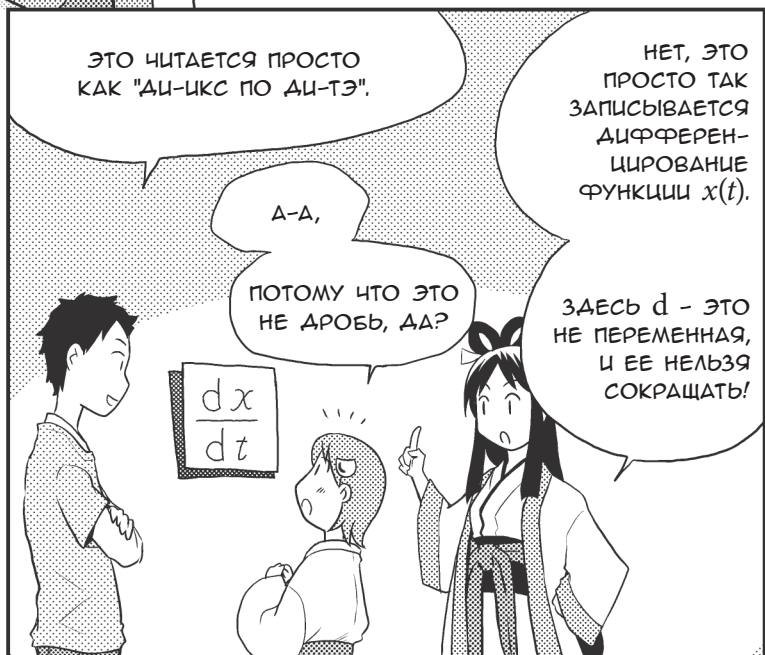
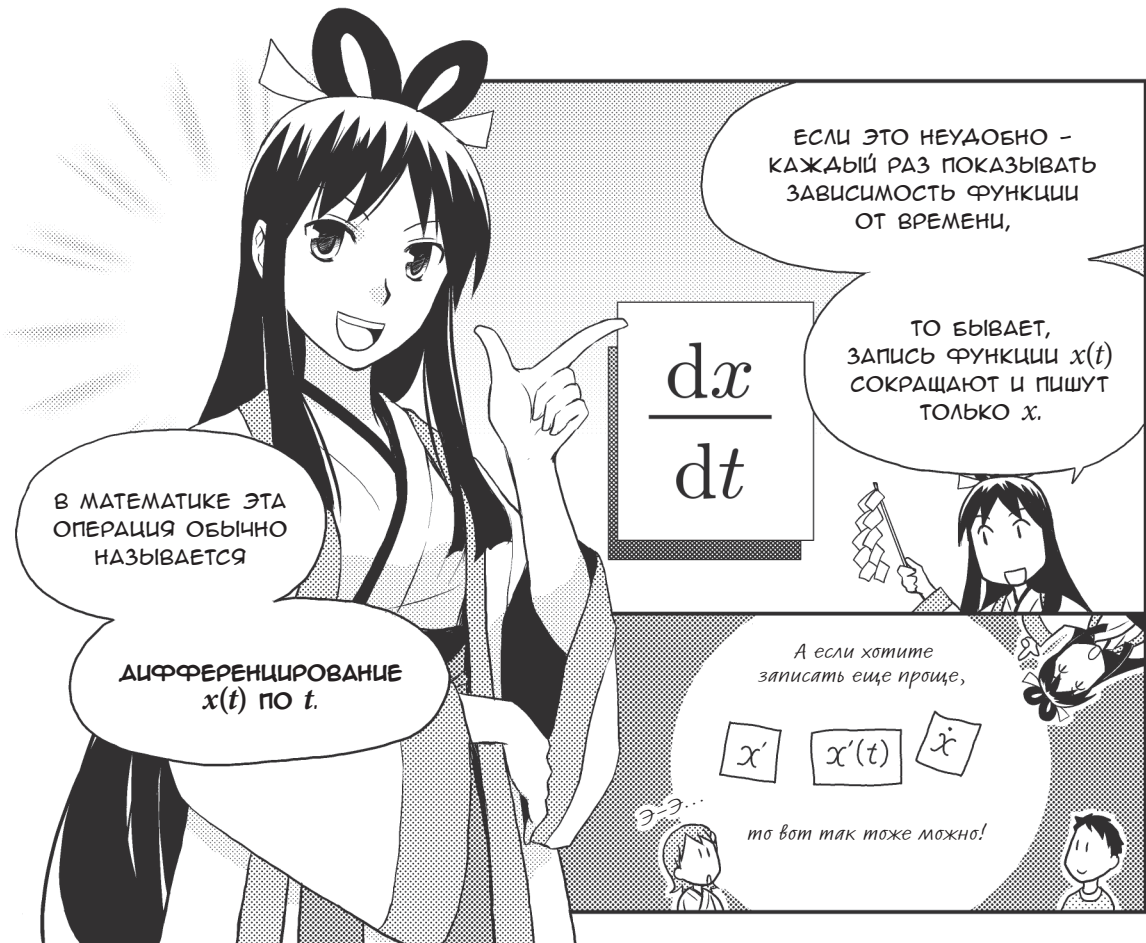
...ТО ВОТ ЧТО
МЫ ПОЛУЧИМ.

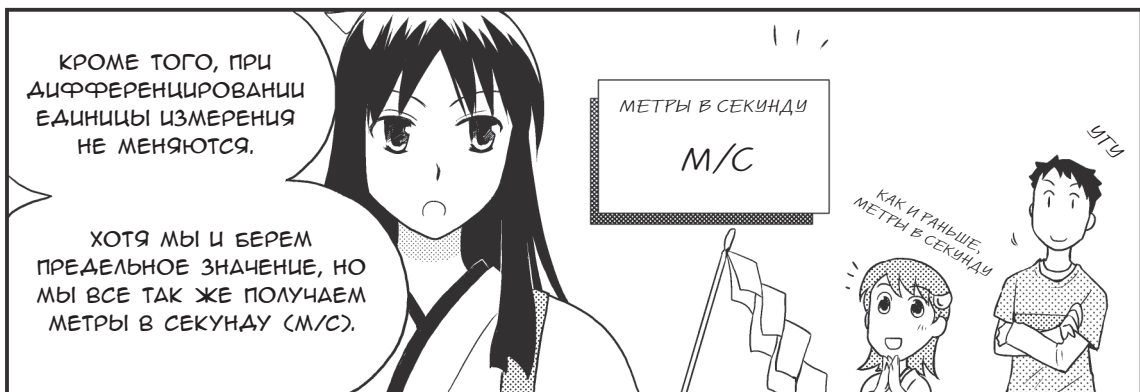
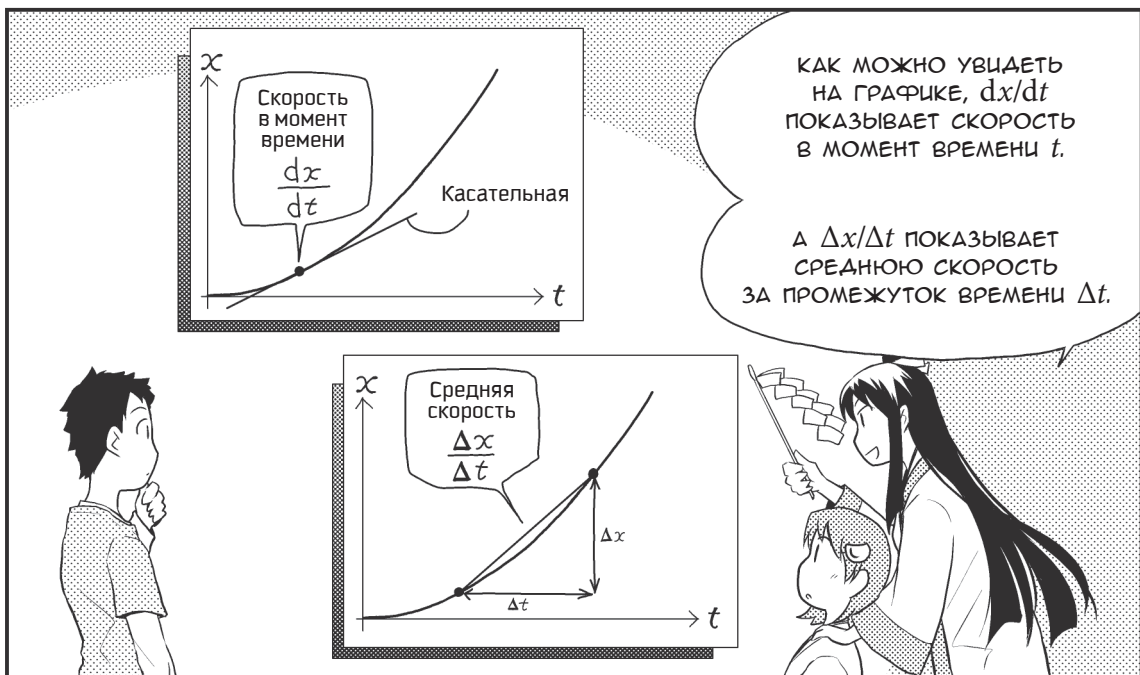
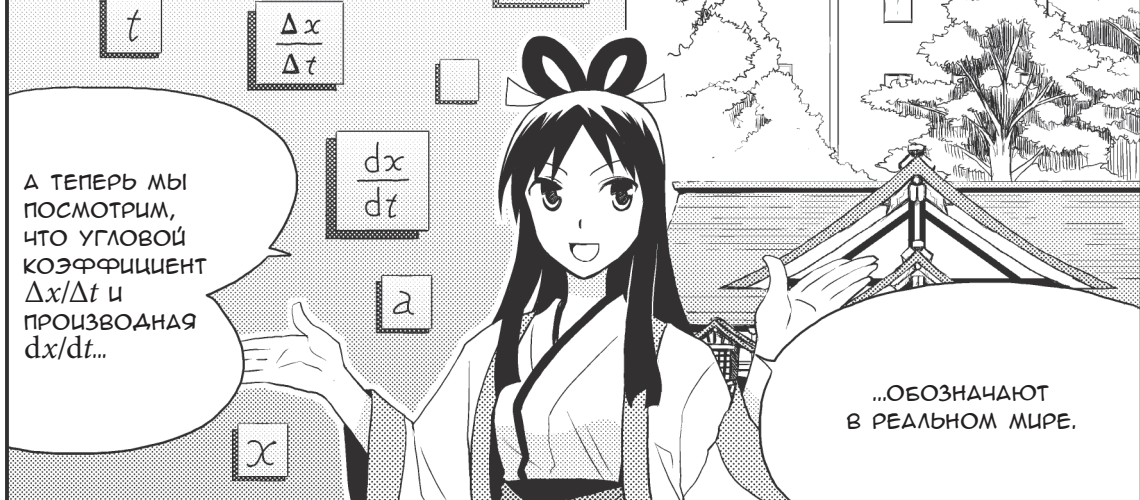
ЭТО НАЗЫВАЕТСЯ
ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ
 $x(t)$ В МОМЕНТ ВРЕМЕНИ t .

ТАК

$$\frac{d}{dt} x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

И ЗАПИСЫВАЕТСЯ
ПРОИЗВОДНАЯ
ВОТ ТАК,
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
СИМВОЛА d .





ТАК, ЕСЛИ СКОРОСТЬ,
НАЙДЕННУЮ С ПОМОЩЬЮ
ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ
МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ x
ПО ВРЕМЕНИ t ,
МЫ ОБОЗНАЧИМ КАК v ,

ТО СКОРОСТЬ МОЖНО
ТАКЖЕ ЗАПИСАТЬ КАК
ФУНКЦИЮ ОТ ВРЕМЕНИ,
ТО ЕСТЬ $v(t)$.

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$



ФУНКЦИЯ $v(t)$
БУДЕТ НАЗЫВАТЬСЯ
СЛОЖНОЙ ФУНКЦИЕЙ
ОТ ФУНКЦИИ $x(t)$.

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

ТАК КАК ЭТО ФУНКЦИЯ,
МЫ МОЖЕМ ИЗООБРАЗИТЬ
ЕЕ НА ГРАФИКЕ.

НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ
ОСИ ОТЛОЖИМ ВРЕМЯ
 t , НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ
ОСИ - СКОРОСТЬ v .

v (Скорость)

t
(Время)

ВОТ ЧТО
ПОЛУЧИТСЯ.

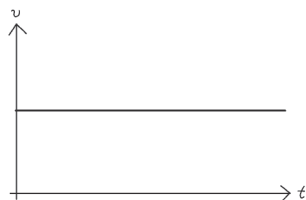


График скорости,
когда она постоянна

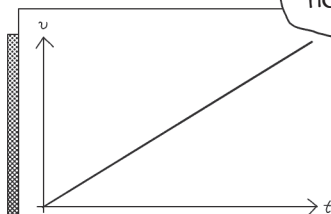


График скорости, когда она
пропорциональна времени

ЕСЛИ СКОРОСТЬ
ПОСТОЯННА,
ТО ФУНКЦИЯ БУДЕТ
ПАРАЛЛЕЛЬНА
ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОСИ
АБСЦИСС.

ЕСЛИ СКОРОСТЬ
МЕНЯЕТСЯ
ПРОПОРЦИОНАЛЬНО
ВРЕМЕНИ, ТО ФУНКЦИЯ
БУДЕТ НАКЛОННОЙ
ПРЯМОЙ.



СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ
СКОРОСТИ ОТ ФУНКЦИИ
 $x(t)$...

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

...ЯВЛЯЕТСЯ
ПРОИЗВОДНОЙ
ФУНКЦИИ $x(t)$
ПО ВРЕМЕНИ t .

И МЫ МОЖЕМ ЕЕ
ЕЩЕ РАЗ ПРОДИФФЕ-
РЕНЦИРОВАТЬ ПО
ВРЕМЕНИ.

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)$$

ЧТО?!

ЕЩЕ РАЗ?

ЧТО ЗА
УДИВЛЕНИЕ?

РАЗВЕ ТЫ
НЕ ДОЛЖЕН
ЭТО ЗНАТЬ?

НУ...
ЭТО...

ЭТО
СКОРОСТЬ.

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

А-А...
НУ АА...

А ЭТО -
УСКОРЕНИЕ!!

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)$$

ЭТО МОЖНО
ЗАПИСАТЬ
БОЛЕЕ ПРОСТО.

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

БУДЬТЕ
ВНИМАТЕЛЬНЫ, ХОТЯ
ЗАПИСЬ И ПОХОЖА
НА ВОЗВЕДЕНИЕ
В СТЕПЕНЬ, НО СМЫСЛ
ТУТ СОВСЕМ ДРУГОЙ!

Вот возведение в степени!

$$v^2(t) = \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

ТО ЕСТЬ
ЭТА 2 ПОКАЗЫ-
ВАЕТ, ЧТО НУЖ-
НО ДВА РАЗА
ПРОДИФФЕРЕН-
ЦИРОВАТЬ,
ТАК?

АА,
ВСЕ ВЕРНО!

Сложная функция
1-го порядка

$$\frac{d}{dt} x(t)$$

Сложная функция
2-го порядка

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

КСТАТИ, ЧИСЛО
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ
СООТВЕТСТВУЕТ
ПОРЯДКУ СЛОЖНОЙ
ФУНКЦИИ.

 А сейчас оставим на время планер и немного займемся дифференциальными вычислениями, хорошо?

 Хорошо!

 Мидзуки, ты прямо рвешься в бой, да?

 Существуют разные правила дифференцирования функции $f(t)$. Рассмотрим некоторые из них на примерах.

Для начала рассмотрим случай с константой:

$$f(t) = 1.$$

Следуя определению производной:

$$\frac{d}{dt} f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{\Delta t} = 0,$$

в результате получаем нуль.

Далее рассмотрим случай, когда функция пропорциональна аргументу (t) .

$$f(t) = t.$$

Следуя определению производной, получим:

$$\frac{d}{dt} f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(t + \Delta t) - t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{t + \Delta t - t}{\Delta t} = 1.$$

Когда функция пропорциональна аргументу в квадрате:

$$f(t) = t^2,$$

в этом случае:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - t^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t + \Delta t) = 2t. \end{aligned}$$

В результате получим функцию $2t$.

 Ну что, более ли менее усвоили?

 Хм...



Может, если записать подряд, будет более понятно:

$$f(t) = 1 \rightarrow \frac{d}{dt} f(t) = 0;$$

$$f(t) = t \rightarrow \frac{d}{dt} f(t) = 1;$$

$$f(t) = t^2 \rightarrow \frac{d}{dt} f(t) = 2t.$$



Ага! Теперь проще запомнить...



Теперь мы можем воспользоваться преимуществом мира математики и обобщить пример. Так, если мы заменим конкретное число в показателе степени на переменную n , то получим:

$$f(t) = t^n.$$

Здесь преобразования будут немного сложными, но:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(t + \Delta t)^n - t^n}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(t + nt^{n-1}\Delta t + \dots + nt\Delta t^{n-1} + \Delta t^n) - t^n}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{nt^{n-1}\Delta t + \dots + nt\Delta t^{n-1} + \Delta t^n}{\Delta t} \\ &= nt^{n-1}. \end{aligned}$$

Получим функцию³ от t в степени $(n - 1)$:

$$f(t) = t^n \rightarrow \frac{d}{dt} f(t) = nt^{n-1}.$$



Это так называемая формула дифференцирования:

$$\frac{d}{dt} t^n = nt^{n-1}.$$

Да?

³ Когда в формуле встречается «...», это показывает, что есть сокращенные элементы. Так как n – переменная, то мы не можем знать точное количество элементов и не можем записать их в формуле. В этом случае в формуле ставится многоточие, означающее, что мы хоть и не можем записать, но понимаем, что там пропущено.

 Формулы – это удобные математические инструменты. Благодаря формулам нам не нужно каждый раз делать вычисления с самого начала. В этом можно убедиться, если вывести какую-то формулу самому. Зная формулы, не нужно каждый раз прокладывать новую дорогу, так как уже найден путь, ведущий к цели, которым может воспользоваться любой.

 Любой?

 Да. И это важный момент. Математические вычисления порой выглядят сложными, но на деле оказываются гораздо проще.

В учебниках вам встретятся различные формулы дифференцирования, обязательно попробуйте вывести их самостоятельно.

 Вот, например, некоторые из них.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \sin t &= \cos t; \\ \frac{d}{dt} \cos t &= -\sin t; \\ \frac{d}{dt} e^t &= e^t.\end{aligned}\tag{2.1}$$

 А ниже представлены основные свойства дифференцирования:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (\alpha f(t) + \beta g(t)) &= \alpha \frac{d}{dt} f(t) + \beta \frac{d}{dt} g(t); \\ \frac{d}{dt} f(t)g(t) &= g(t) \frac{d}{dt} f(t) + f(t) \frac{d}{dt} g(t); \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\frac{dy}{dx}} (y = f(x), x = f^{-1}(x)).\end{aligned}\tag{2.2}$$

 Ага, ага.

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

ВЕРНЕМСЯ
К ПЛАНЕРУ.

БЛАГОДАРЯ
ПРОИЗВОДНЫМ МЫ ТЕПЕРЬ
ЗНАЕМ ФУНКЦИЮ $v(t)$,
ВЫРАЖАЮЩУЮ СКОРОСТЬ ЧЕРЕЗ
ФУНКЦИЮ $x(t)$, ВЫРАЖАЮЩУЮ
МЕСТОПОЛОЖЕНИЕ ПЛАНЕРА.

АГА.

МЦАЗУКИ
ДЕЙСТВИТЕЛЬНО
ВОШЛА ВО ВКУС...

А ТЕПЕРЬ
НАОБОРОТ,

ПОДУМАЕМ,
КАК НАЙТИ ФУНКЦИЮ $x(t)$,
ВЫРАЖАЮЩУЮ
МЕСТОПОЛОЖЕНИЕ, ЕСЛИ
МЫ ЗНАЕМ ФУНКЦИЮ $v(t)$,
ВЫРАЖАЮЩУЮ
СКОРОСТЬ.

?

ДЛЯ НАЧАЛА
РАССМОТРИМ
СИТУАЦИЮ, КОГДА
СКОРОСТЬ ПЛАНЕРА
ПОСТОЯННАЯ.

ЕСЛИ СКОРОСТЬ
ФИКСИРОВАННАЯ И РАВНА v ,
ТО С МОМЕНТА ВРЕМЕНИ t_i
ДО МОМЕНТА ВРЕМЕНИ t_f
ЗА ПРОМЕЖУТОК ВРЕМЕНИ

$$\Delta t = t_f - t_i$$

ДЛИНУ РАССТОЯНИЯ l
(LENGTH), НА КОТОРОЕ
ПРОДВИНУЛСЯ ПЛАНЕР,

МОЖНО
ВЫРАЗИТЬ КАК
 $l = v \Delta t$.

ХММ,
ТО ЕСТЬ...

...РАССТОЯНИЕ РАВНО
СКОРОСТЬ, УМНОЖЕННАЯ
НА ВРЕМЯ, ТАК?

Пройденное расстояние	Скорость	Время
l	$= v$	$\times t$

АА, ВЕРНО...

ПОСМОТРИМ
НА ГРАФИКЕ.

$$l = v \Delta t$$

графически

График пройденного расстояния
в случае фиксированной скорости

Пройденное расстояние
равняется площади
прямоугольника,
ограниченного
значениями времени t_i
и t_f и функцией $v(t)$

РАССТОЯНИЕ l БУДЕТ
СООТВЕТСТВОВАТЬ
ПЛОЩАДИ ВОТ ЭТОГО
ПРЯМОУГОЛЬНИКА.

УХ ТЫ!
ВОТ ОНО КАК!

ЕСЛИ МЫ СМОЖЕМ
ОБООБЩИТЬ ЭТУ СИТУАЦИЮ,
ТО ДЛЯ ЛЮБОЙ СКОРОСТИ,
НАЙДЯ ПЛОЩАДЬ
ПОЛУЧЕННОЙ ФИГУРЫ,

МЫ СМОЖЕМ ВЫЧИСЛИТЬ
И ПРОЙДЕННОЕ РАССТОЯНИЕ.

x

t

0

x

t

0

О-О-О!

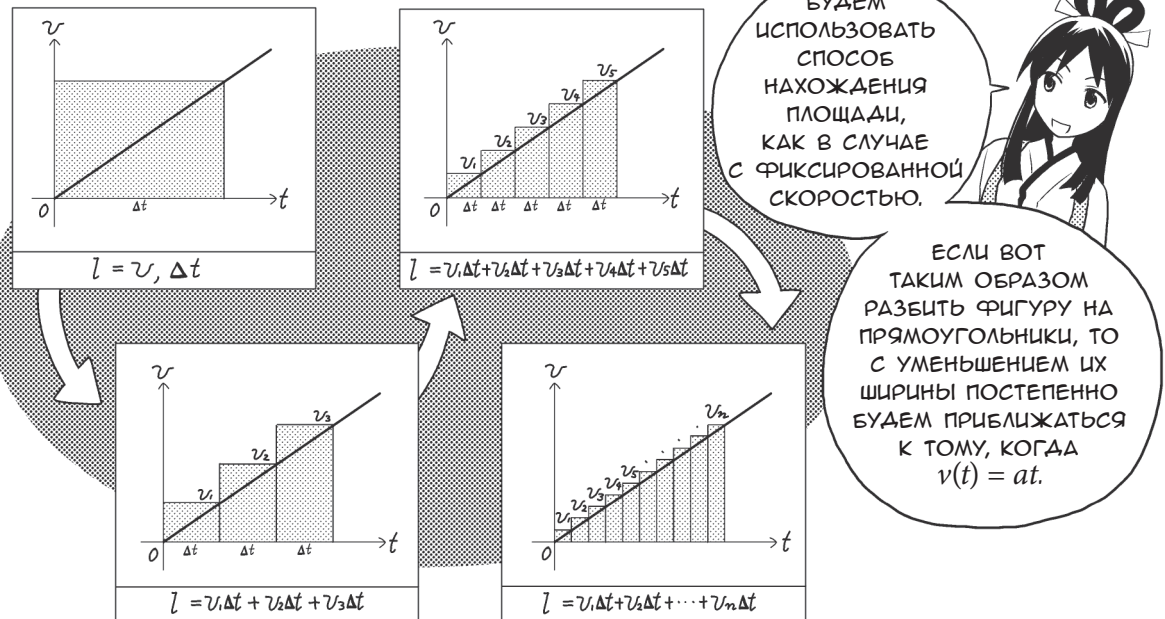
ХОРОШО,

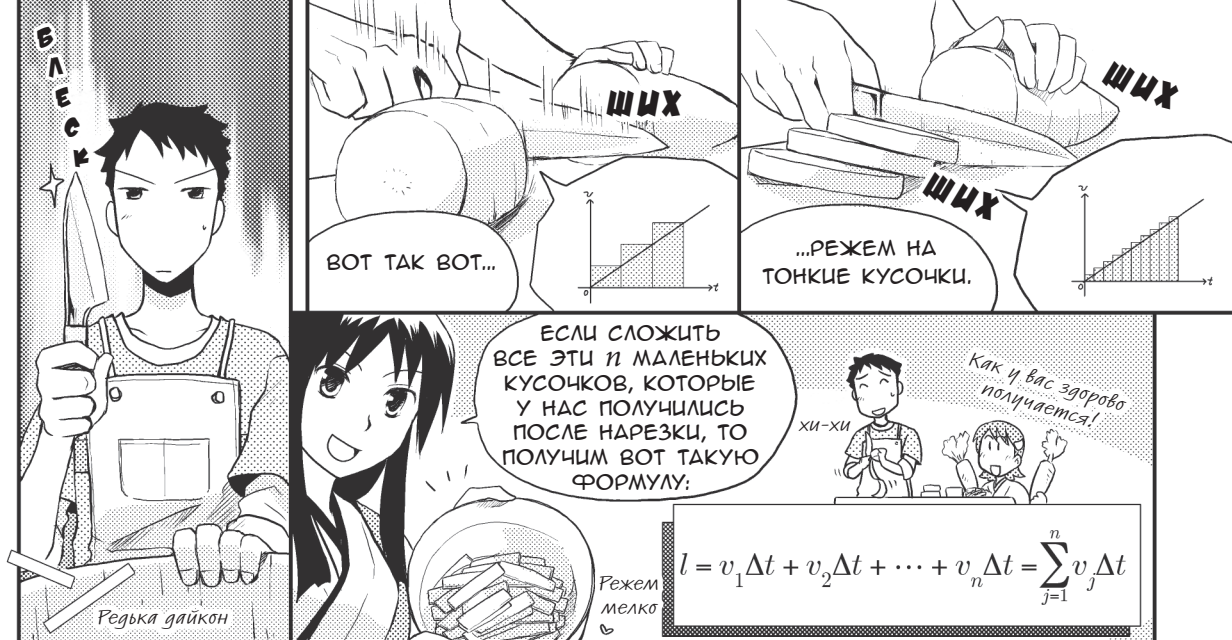
РАССМОТРИМ
ДРУГОЙ
ПРИМЕР.

ДАА!

ВОТ ЭТО
РВЕНИЕ!

Мне бы
тоже так
подпрыгнуть!





ОСТАВЬТЕ НА
ВРЕМЯ РЕАБКУ.

ВОЗЬМЕМ ЛИМИТ
ФУНКЦИИ ПРИ n ,
СТРЕМЯЩЕМСЯ
К БЕСКОНЕЧНОСТИ.

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n v_j \Delta t$$

ТОГДА ЭТО...

...ЗАПИСЫВАЕТСЯ
ВОТ ТАК!

$$l = \int_{t_i}^{t_f} v(t) dt$$

ТЕПЕРЬ
КАКОЙ-ТО
ДЛИННЫЙ ЗНАК
ПОЯВИЛСЯ!

Интеграл

$\int$

ЭТОТ ЗНАК,
ПОХОЖИЙ НА
РАСТЯНУТУЮ ВВЕРХ
И ВНИЗ БУКВУ "S",

НАЗЫВАЕТСЯ
ИНТЕГРАЛ.

У НЕГО ТАКОЙ
УМНЫЙ ВИД, ДА?

ХМ,
УМНЫЙ
ВИД?

НЕ НАГОВОРИЛИСЬ
ЕЩЕ О ЗНАКЕ?

ЭТА ФОРМУЛА
НАЗЫВАЕТСЯ
ФОРМУЛОЙ
ИНТЕГРИРОВАНИЯ.

Формула интегрирования

$$l = \int_{t_i}^{t_f} v(t) dt$$

ГОВОРЯТ ТАК:
"ИНТЕГРИРОВАНИЕ
ФУНКЦИИ $v(t)$
НА ОТРЕЗКЕ $[t_i; t_f]$ ".

ГДЕ

t - ПЕРЕМЕННАЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ,
 t_i - НИЖНИЙ ПРЕДЕЛ ИНТЕГРАЛА,
 t_f - ВЕРХНИЙ ПРЕДЕЛ ИНТЕГРАЛА.

НУ ЧТО,
ТЕПЕРЬ ПОНЯТНО,
КАК НАЙТИ ФУНКЦИЮ
МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ $x(t)$,
ЕСЛИ МЫ ЗНАЕМ
ФУНКЦИЮ СКОРОСТИ
 $v(t)$?

ХММ...



Местонахождение планера $x(t_f)$ в момент времени t_f равняется сумме координаты местонахождения планера $x(t_i)$ в момент времени t_i и пройденного с момента времени t_i до момента времени t_f расстояния l :

$$x(t_f) = x(t_i) + l.$$

Если же нам известна функция скорости $v(t)$, то пройденное расстояние l можно найти, проинтегрировав функцию $v(t)$:

$$x(t_f) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} v(t) dt.$$

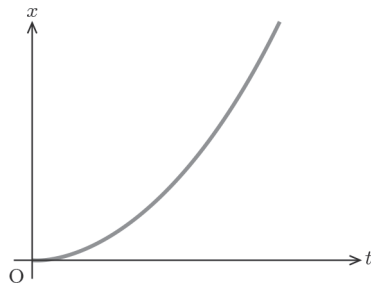
Здесь переменная t_f выражает некоторое определенное значение. Если же мы хотим сделать верхнюю границу интеграла подвижной и изменяемой, то просто заменим t_f на t^4 . Теперь расстояние l станет функцией от времени:

$$l(t) = \int_{t_i}^t v(t) dt. \quad (2.3)$$

И местоположение тоже является функцией от времени $x(t)$:

$$x(t) = x(t_i) + \int_{t_i}^t v(t) dt. \quad (2.4)$$

В этом случае, если за начальную позицию мы возьмем нуль: $x(t_i) = 0$, на вертикальной оси будем отмечать местоположение, а на горизонтальной оси – время, то получим следующий график:

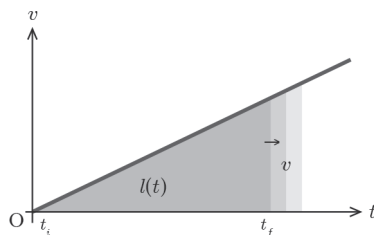


*Изменение
местоположения от времени*



Однако когда мы знаем функцию скорости от времени $v(t)$, то пройденное с момента времени t_i до неопределенного момента времени t расстояние является функцией от времени $l(t)$.

⁴ Считаем, что момент времени может быть любым.



Так как верхняя граница интеграла изменяемая, то и площадь фигуры меняется

*Интеграл функции
пройденного расстояния $l(t)$ с момента времени t_i
до произвольного момента времени t*



Продифференцируем функцию $l(t)$ по t . Следуя определению производной функции, получим такое уравнение:

$$\frac{d}{dt} l(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{l(t + \Delta t) - l(t)}{\Delta t}.$$

Теперь заменим $l(t)$ на формулы с интегралами и вот что получим:

$$\frac{d}{dt} l(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{t_i}^{t+\Delta t} v(t) dt - \int_{t_i}^t v(t) dt}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{t_i}^{t+\Delta t} v(t) dt}{\Delta t}. \quad (2.5)$$

Этот предел стремится к $v(t)$. Другими словами:

$$\frac{d}{dt} l(t) = v(t).$$

Однако вернемся к формуле функции расстояния $l(t)$ (2.3):

$$l(t) = \int_{t_i}^t v(t) dt.$$

Из этого следует, что если мы дифференцируем проинтегрированную функцию, то в результате мы получаем саму функцию!



Вернемся к формуле функции местоположения $x(t)$ (2.4):

$$x(t) = x(t_i) + \int_{t_i}^t v(t) dt.$$

Вернем на время вместо переменной t , означающей, что ее значение может быть произвольным, переменную t_f . И преобразуем формулу, отняв от обеих частей $x(t_i)$:

$$\int_{t_i}^{t_f} v(t) dt = x(t_f) - x(t_i).$$

⁵ Если тебе кажется, что это само собой понятно, то тут одно из двух: либо ты такой знаток математики, что эту книжку тебе и читать не нужно, либо ты просто хорошо вызубрил формулы, но не понял сути.

Получается, что расстояние, пройденное планером с момента времени t_i до момента времени t_f , можно выразить как местоположение планера в момент времени t_f минус местоположение планера в момент времени t_i . Само собой, не так ли. Но подождите. Пройденное расстояние равно площади фигуры на графике функции $v(t)$. С другой стороны, продифференцировав функцию местоположения, мы нашли значение скорости. И казалось бы, не должно быть ничего общего у площади фигуры на графике и найденного посредством дифференцирования значения скорости. Однако, исходя из формулы, мы видим, что они связаны. И кажется, это очень важная связь.

Попробуем обобщить. Назовем $F(t)$ функцию, которая после дифференцирования становится функцией $f(t)$.

$$\frac{d}{dt} F(t) = f(t). \quad (2.6)$$

Функция $F(t)$ называется первообразной для функции $f(t)$. Отношения между этими функциями такие: если мы продифференцируем функцию $F(t)$, то получим производную функцию $f(t)$, если мы проинтегрируем функцию $f(t)$, то получим исходную функцию $F(t)$. Подобно умножению и делению, дифференцирование и интегрирование являются взаимно-обратными операциями.



Вернемся к выявленной нами взаимосвязи между скоростью и местоположением:

$$\int_{t_i}^{t_f} v(t) dt = x(t_f) - x(t_i).$$

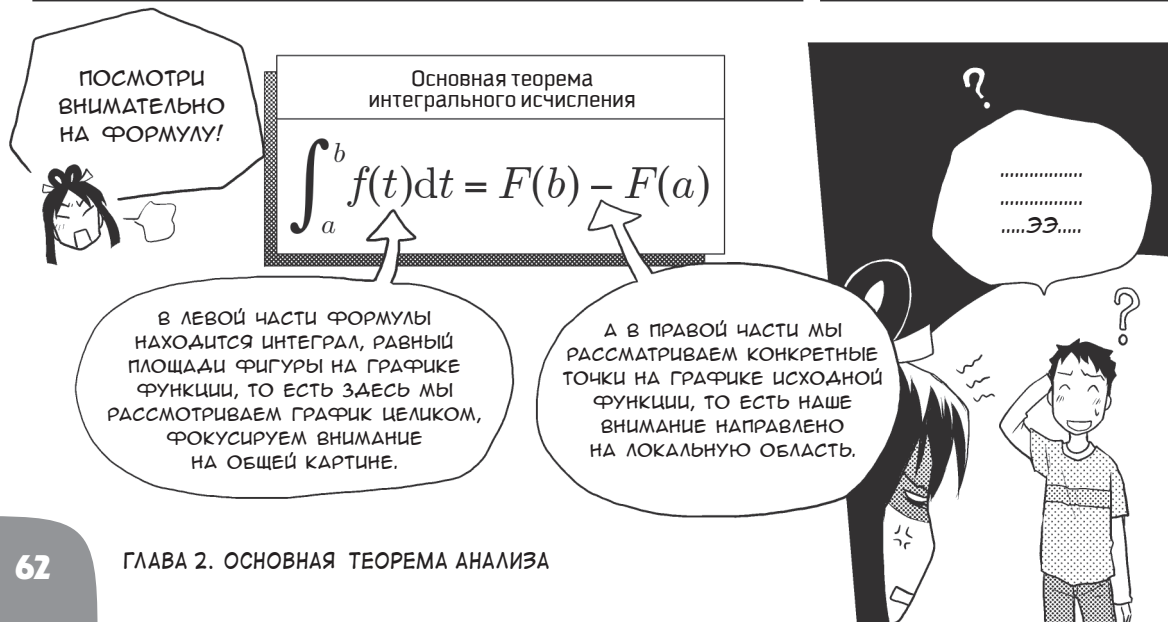
Заменим $v(t)$ на $f(t)$, а $x(t)$ на исходную для $f(t)$ функцию $F(t)$, t_i на a , а t_f на b , тогда получим:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Это – основная теорема интегрального исчисления.



Она показывает, что найти площадь фигуры, образованной функцией на графике (левая часть формулы), можно посредством операции, обратной дифференцированию (правая часть формулы).





ЯСНО?
В РЕАЛЬНОМ МИРЕ
ОБЩАЯ
(ГЛОБАЛЬНАЯ)
И ЛОКАЛЬНАЯ
КАРТИНЫ СОВСЕМ
РАЗНЫЕ.

ПРИМЕР
ГЛОБАЛЬНОЙ
КАРТИНЫ –
ЭТО КОГДА МЫ
СМОТРИМ НА РЕКУ
ИЗ ЛЕТАЮЩЕГО
ВЫСОКО ПЛАНЕРА
И ВИДИМ ЕЕ
ЦЕЛИКОМ.



Глобальная картина



Локальная картина

ПРИМЕР ЛОКАЛЬНОЙ
КАРТИНЫ – ЭТО КОГДА
МЫ СМОТРИМ НА РЕКУ,
НАХОДЯСЬ НА ЕЕ
БЕРЕГУ.



Э...

А ПО УРАВНЕНИЮ
ПОЛУЧАЕТСЯ, ЧТО
ОНИ СВЯЗАНЫ...
ДА?



ТАК И ЕСТЬ.

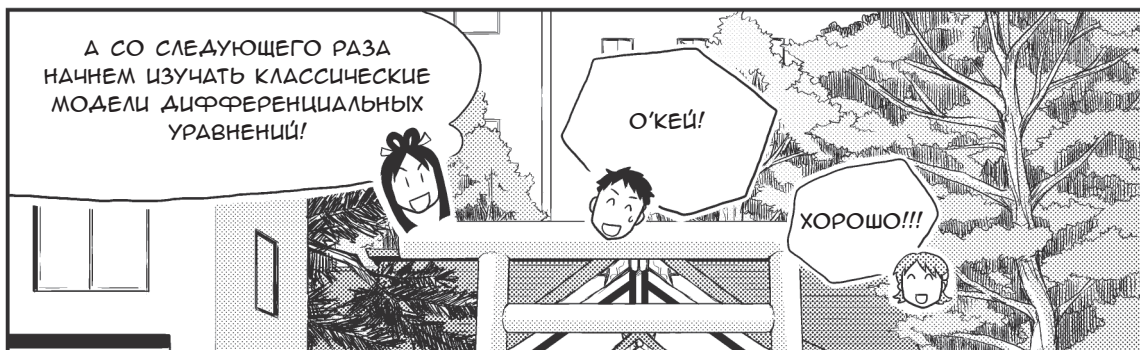
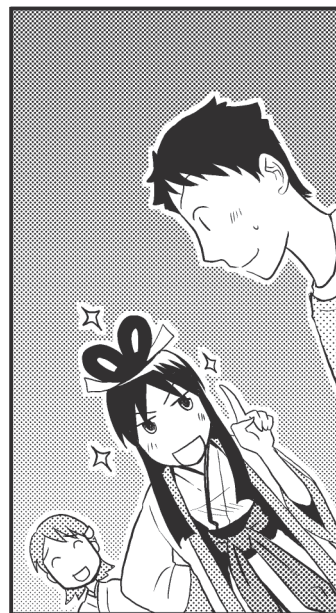
В РЕАЛЬНОМ МИРЕ,
КАК ВНИМАТЕЛЬНО
НИ СМОТРИ
НА РЕКУ, СТОЯ
НА ЕЕ БЕРЕГУ...

ЦЕЛИКОМ РЕКИ
НЕ УВИДЕТЬ.



НО В МИРЕ МАТЕМАТИКИ
ИНТЕГРИРОВАНИЕ (ТО ЕСТЬ
ГЛОБАЛЬНЫЙ ВИД)
И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ
(ТО ЕСТЬ ЛОКАЛЬНЫЙ ВИД)
СВЯЗАНЫ МЕЖДУ СОБОЙ.

ЭТОМУ НАС УЧИТ ОСНОВНАЯ
ТЕОРЕМА ИНТЕГРАЛЬНОГО
ИСЧИСЛЕНИЯ.



Итак, исходя из основной теоремы интегрального исчисления, площадь фигуры, образованной функцией на графике, равна разнице между значениями исходной функции в точке верхнего предела интеграла и в точке нижнего предела интеграла. Если записать $F(b) - F(a)$ как:

$$[F(t)]_a^b = F(b) - F(a),$$

то получим:

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b.$$

То есть, другими словами, если мы знаем исходную функцию, то нам не нужно вычислять предел площади фигуры на графике, достаточно подставить значения в исходную функцию и произвести вычитание⁶. Это очень удобно.

Полностью исходная функция для функции $f(t)$ выглядит вот так:

$$\int f(t)dt.$$

Это называется **неопределенный интеграл**. И наоборот, интеграл, определяющий площадь фигуры на графике функции:

$$\int_a^b f(t)dt,$$

называется **определенным интегралом**. Основная теорема интегрального исчисления говорит и о том, что не имеющие связи на первый взгляд неопределенный и определенный интегралы, на самом деле связаны⁷.

Итак, если $F(t)$ – это исходная функция для $f(t)$, а C – это постоянная, которая может принимать любые значения, то исходя из свойств производной:

$$\frac{d}{dt}(F(t) + C) = \frac{d}{dt}F(t) + 0 = f(t),$$

а значит, и функция $F(t) + C$ будет являться исходной функцией для $f(t)$. Другими словами, неопределенный интеграл будет выглядеть так:

$$\int f(t)dt = F(t) + C.$$

Значение C мы не можем выбирать. C называется **произвольной постоянной**, так как она может принимать любое значение. И именно благодаря ее наличию интеграл называется **неопределенным**. Если изобразить исходные функции для такого интеграла графически, это будет множество параллельных друг другу графиков.

⁶ Вычислять интеграл с помощью предела на практике довольно сложно.

⁷ Речь не о форме уравнения, а о смысле. Люди, знающие основную теорему интегрального исчисления, иногда так думают.

Так как интегрирование и дифференцирование являются взаимно-обратными операциями, мы можем найти неопределенные интегралы через исходные функции для подынтегральных функций.

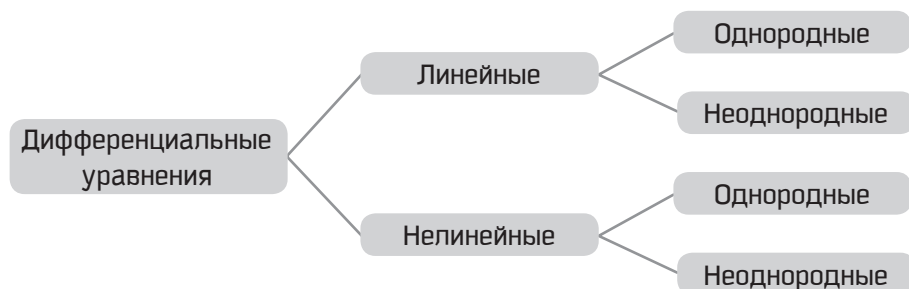
$$\frac{d}{dt} t^n = n t^{n-1} \rightarrow \int t^{n-1} dt = \frac{t^n}{n} + C \quad (n \neq 0);$$

$$\frac{d}{dt} \sin t = \cos t \rightarrow \int \cos t dt = \sin t + C;$$

$$\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t \rightarrow \int \sin t dt = -\cos t + C;$$

$$\frac{d}{dt} e^t = e^t \rightarrow \int e^t dt = e^t + C.$$

Подробно то, как решать дифференциальные уравнения, мы рассмотрим в следующих главах. Эту же главу закончим тем, что выделим основные виды дифференциальных уравнений. Мы уже говорили о том, что дифференциальным уравнением называется любое уравнение, содержащее производную. Их очень много, и чтобы не запутаться, нужно их классифицировать. Для классификации используются следующие показатели: количество переменных, порядок, степень, линейность и нелинейность, однородность и неоднородность, постоянство и непостоянство коэффициентов и т. д.



Классификация дифференциальных уравнений

Для начала рассмотрим фактор количества переменных. Если независимая переменная одна, то такие уравнения называются **обыкновенными дифференциальными уравнениями**. Если же независимых переменных несколько, то они называются **дифференциальными уравнениями в частных производных**. В этой книге мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения. Все дифференциальные уравнения, которые нам уже встречались в этой книге, тоже являются обыкновенными. Так как здесь мы опускаем дифференциальные уравнения в частных производных, то, пожалуйста, имейте в виду, что когда в этой книге мы говорим о дифференциальных уравнениях, то подразумеваем обыкновенные дифференциальные уравнения.

Далее рассмотрим порядок и степень.

Самый большой порядок производной функции, содержащейся в дифференциальном уравнении, называется порядком дифференциального уравнения. А степень производной функции в уравнении называется степенью самого дифференциального уравнения. Например,

$$\frac{dx}{dt} + kx = ka \quad \leftarrow \text{Уравнение 1-го порядка 1-й степени}$$

содержит производную 1-го порядка и находится в 1-й степени, поэтому называется дифференциальным уравнением 1-го порядка 1-й степени.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + v \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad \leftarrow \text{Уравнение 2-го порядка 1-й степени}$$

Здесь содержатся две производные функции: одна 1-го порядка, другая – 2-го порядка. Следуя правилу, что порядком всего уравнения называется наибольший порядок производной, это дифференциальное уравнение является уравнением 2-го порядка 1-й степени.

Теперь рассмотрим линейность и нелинейность. Линейными называются дифференциальные уравнения, в которых переменные и производные функций находятся в первой степени. В противном случае это будет нелинейное дифференциальное уравнение. Еще раз на тех же примерах:

$$\frac{dx}{dt} + kx = ka; \quad \leftarrow \text{Линейное дифференциальное уравнение}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + v \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad \leftarrow \text{Линейное дифференциальное уравнение}$$

Мы видим, что в обоих уравнениях степени переменных и производных функций – первые. Значит, оба уравнения являются линейными.

Далее, уравнения с постоянными и переменными коэффициентами. Если все коэффициенты в линейном уравнении – постоянные, то оно называется дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Если же среди коэффициентов есть переменные, то такое уравнение называется дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. Например:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + v \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \leftarrow \text{Дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами}$$

– тут коэффициенты переменные,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 7x = 0 \quad \leftarrow \text{Дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами}$$

– а здесь коэффициенты постоянные.

И в конце рассмотрим однородные и неоднородные уравнения. Однородными называются такие линейные дифференциальные уравнения, которые не содержат свободного члена. В противном случае уравнения будут неоднородными. Например:

$$\frac{dx}{dt} + kx = ka \quad \leftarrow \text{Неоднородное дифференциальное уравнение}$$

– это уравнение неоднородное;

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + v \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \leftarrow \text{Однородное дифференциальное уравнение}$$

– а это однородное.

Подытожим классификацию уравнений. Например, уравнение вида:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + v \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \leftarrow \text{Обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка 1-й степени с переменными коэффициентами}$$

будет называться обыкновенным линейным однородным дифференциальным уравнением 2-го порядка 1-й степени с переменными коэффициентами. Длинновато, не так ли. На самом деле чаще всего названия уравнений сокращают в соответствии с ситуацией. Обратите на это внимание, когда будете детальнее работать с дифференциальными уравнениями.

В главе 3 мы рассмотрим метод разделения переменных для однородных уравнений 1-го порядка, в главе 4 рассмотрим неоднородные линейные уравнения 1-го порядка, а в главе 5 – линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка.

Примеры дифференциальных уравнений, используемые в этой книге

Порядок	Вид	Уравнение	Пояснение	Глава
1-й	Однородные линейные	$\frac{dP}{dt} = \mu P$	Дифференциальное уравнение, описывающее изменение численности оленей эдзо	3
	Неоднородные линейные	$m \frac{dv}{dt} = mg - 6\pi\eta r v$	Уравнение движения с учетом силы тяжести и силы вязкого трения	4
2-й	Однородные линейные	$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$	Уравнение движения осциллятора с учетом упругости и сопротивления	5
	Неоднородные линейные	$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos vt$	Уравнение движения осциллятора с учетом упругости и сопротивления и воздействия внешних сил	5

ГЛАВА 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ СУЩЕСТВУЕТ ЛИ ЦАРСТВО ОЛЕНЕЙ ЭДЗО?





Картошка фри

1. ЯВЛЕНИЕ

СЕГОДНЯ Я БУДУ
ОБЪЯСНЯТЬ ЯВЛЕНИЯ,
КОТОРЫЕ ТО ПОСТОЯННО
УВЕЛИЧИВАЮТСЯ
(ВОЗРАСТАЮТ),
ТО ПОСТОЯННО
УМЕНЬШАЮТСЯ
(УБЫВАЮТ).

Картошка фри

ПОПРОБУЕМ ИСПОЛЬЗОВАТЬ
МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ
ПЕРЕМЕННЫХ.

...ОДНАКО...

ЭТА КАРТОШЕЧКА
ВКУСНЮЩАЯ!

хрум-хрум

И соли,
и перца
в самый
раз!!

Я КУПИЛ ЕЕ
У СТАНЦИИ,
ТАМ ОТКРЫЛСЯ
МАГАЗИНЧИК
ТОВАРОВ
С ХОККАЙДО.

ГОВОРЯТ, ТАМ
МОРОЖЕНОЕ
ИСКЛЮЧИТЕЛЬНО
ВКУСНОЕ.

ХОЧУ-ХОЧУ!

НО СНАЧАЛА
УЧЕНИЕ!

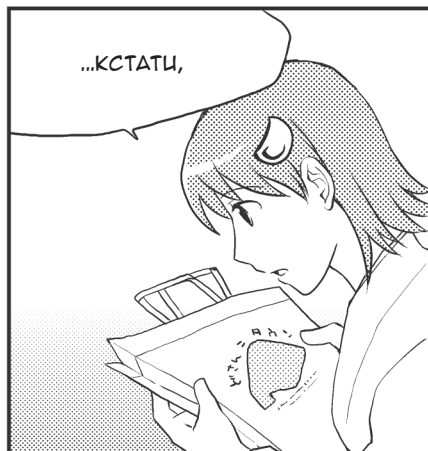
ДА, ДА...
ЗНАЮ..

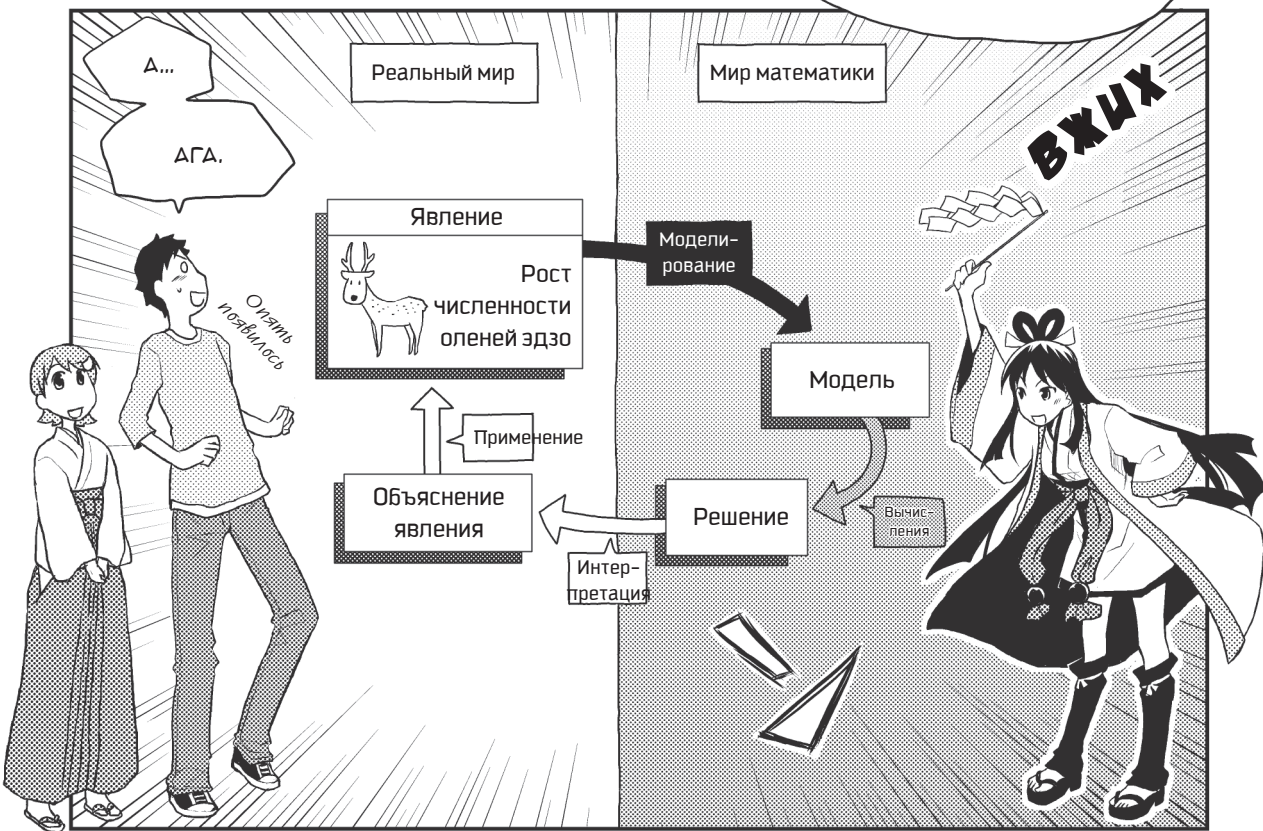
..."ТО ПОСТОЯННО
ВОЗРАСТАЮТ, ТО
ПОСТОЯННО УБЫВАЮТ"...

АГА.

ТАКИХ ЯВЛЕНИЙ
МНОГО, ДА?

ХММ...







БУДЕМ СЧИТАТЬ, ЧТО ПРИРОСТ ОЛЕНЕЙ ЭЗАО ТОЖЕ ПРОПОРЦИОНАЛЕН ЧИСЛЕННОСТИ ОЛЕНЕЙ.

ТО ЕСТЬ ЕСЛИ В СТАДЕ ИЗ 10 ОЛЕНЕЙ 1 УМИРАЕТ, А 5 РОЖДАЕТСЯ, ТО...

10 оленей

1 олень

5 оленей

...В СТАДЕ ИЗ 100 ОЛЕНЕЙ, КАЖДЫЙ ГОД 10 УМИРАЕТ И 50 РОЖДАЕТСЯ.

ПОНЯТНО.

Время t

Численность оленей $P(t)$

ОБОЗНАЧИМ ВРЕМЯ КАК t , А ЧИСЛЕННОСТЬ ОЛЕНЕЙ ЭЗАО КАК $P(t)$.

ТОГДА, ИСХОДЯ ИЗ ДОПУЩЕНИЯ, ЧТО ТЕМП РОСТА ЧИСЛЕННОСТИ ОЛЕНЕЙ $dP(t)/dt$ ПРОПОРЦИОНАЛЕН ИХ ЧИСЛЕННОСТИ $P(t)$, МЫ МОЖЕМ ПОСТРОИТЬ МОДЕЛЬ.

ОБОЗНАЧИМ КОЭФФИЦИЕНТ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ КАК μ ...

Коэффициент пропорциональности μ

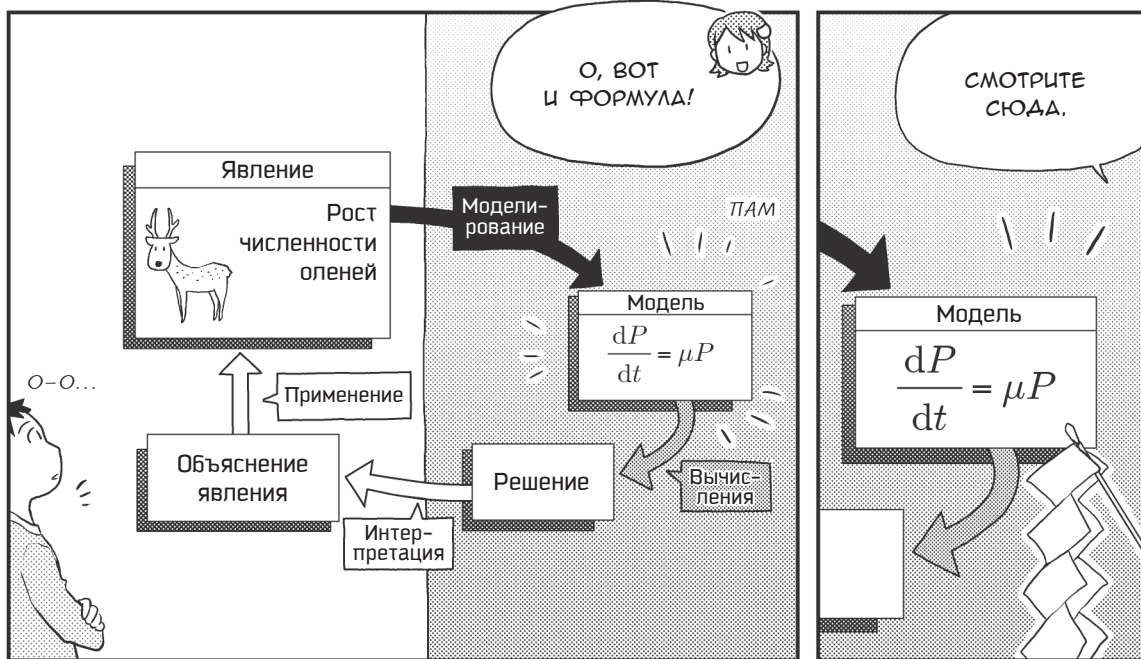
КСТАТИ, ПЕРЕМЕННЫЕ, КОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮТ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ, НАЗЫВАЮТСЯ ПАРАМЕТРАМИ, ИЛИ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ.

Параметр μ

Вспомогательная переменная μ

АТА

ИТАК, ВОТ ЧТО МЫ ПОЛУЧИМ.





ОДНАКО

ЕСЛИ МЫ ВЫЧИСЛИМ ЭТОТ ПАРАМЕТР μ В ОДИН МОМЕНТ ВРЕМЕНИ, ТО ЧТО НАМ ЭТО ДАСТ?

А!

P

μ



ЕСЛИ МЫ УЗНАЕМ ОБСТОЯТЕЛЬСТВА НА ЛОКАЛЬНОМ УЧАСТКЕ, ТО МОЖЕМ УЗНАТЬ И ГЛОБАЛЬНУЮ КАРТИНУ СОБЫТИЙ, ТАК?

ТОЧНО!



МЫ СМОЖЕМ СПРОГНОЗИРОВАТЬ ЧИСЛЕННОСТЬ ОЛЕНЕЙ ХОТЬ ЧЕРЕЗ ГОД, ХОТЬ ЧЕРЕЗ 10 ЛЕТ.

Через год

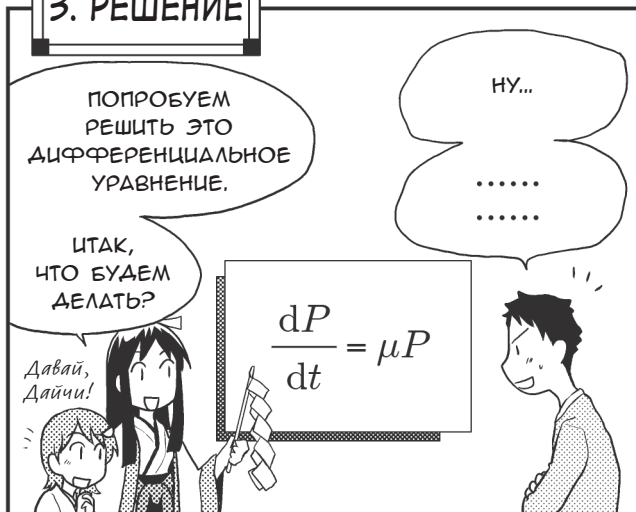
Сейчас



МОЛОДЕЦ, ХОРОШО ЗАПОМНИ!

ХЕ-ХЕ-ХЕ.

3. РЕШЕНИЕ



ПОПРОБУЕМ РЕШИТЬ ЭТО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ.

НУ...

.....
.....

ИТАК, ЧТО БУДЕМ ДЕЛАТЬ?

$$\frac{dP}{dt} = \mu P$$

Давай, давай!



А!

НАДО ПРОИНТЕГРИРОВАТЬ И НАЙТИ ФУНКЦИЮ!

.....

Я его помню!

Гановито

СЕЙЧАС НАША ЗАДАЧА -
НАЙТИ ФУНКЦИЮ
ЧИСЛЕННОСТИ ОЛЕНЕЙ
В ЗАВИСИМОСТИ
ОТ ВРЕМЕНИ - $P(t)$.

ДРУГИМИ
СЛОВАМИ, РЕШИВ
ДИФФЕРЕН-
ЦИАЛЬНОЕ
УРАВНЕНИЕ...

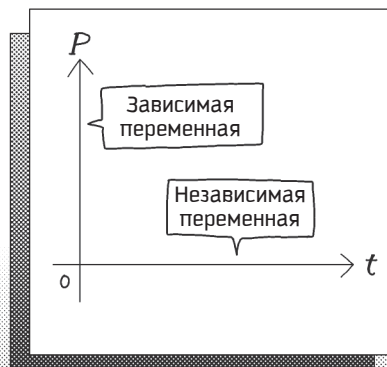
Простите...



МЫ ДОЛЖНЫ БУДЕМ
СМОЧЬ ИЗООБРАЗИТЬ
НА ГРАФИКЕ ИЗМЕНЕНИЕ
ЧИСЛЕННОСТИ ОЛЕНЕЙ P
С ТЕЧЕНИЕМ ВРЕМЕНИ t .

ХМ, ТАК...
ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОСИ
ОТМЕЧАЮТ НЕЗАВИСИМЫЕ
ПЕРЕМЕННЫЕ,
ПО ВЕРТИКАЛЬНОЙ -
ЗАВИСИМЫЕ
ПЕРЕМЕННЫЕ....

ЗНАЧИТ, ВРЕМЯ t -
ЭТО НЕЗАВИСИМАЯ
ПЕРЕМЕННАЯ,
А ЧИСЛЕННОСТЬ
ОЛЕНЕЙ P -
ЗАВИСИМАЯ.



ПОНЯЛ? ПРЕЖДЕ
ВСЕГО НАДО
ОПРЕДЕЛИТЬ
В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ
УРАВНЕНИИ,
ГДЕ НЕЗАВИСИМЫЕ
ПЕРЕМЕННЫЕ,
А ГДЕ ЗАВИСИМЫЕ.

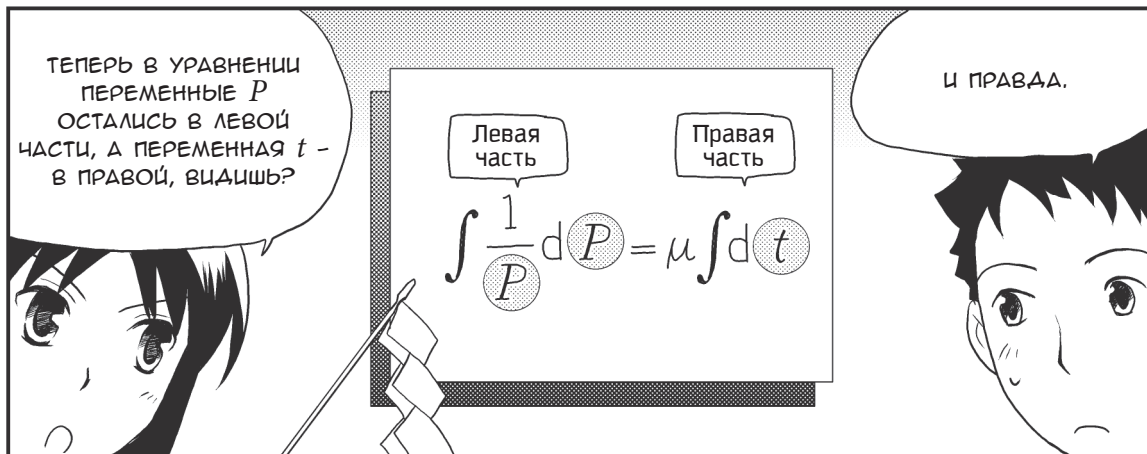
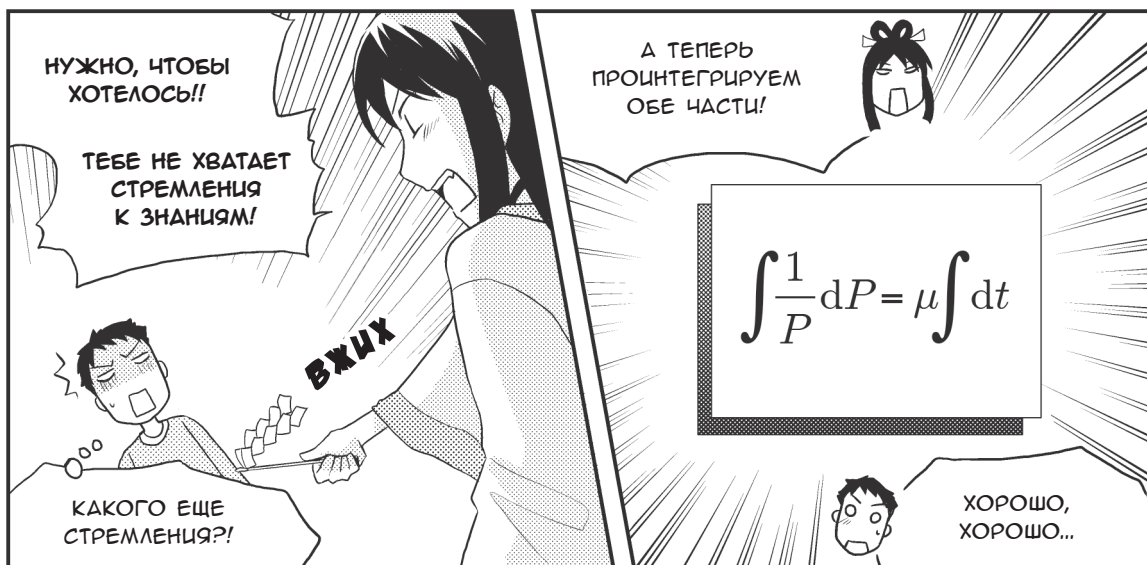
$$\frac{dP}{dt} = \mu P$$

Зависимая
переменная

Независимая
переменная

ДА.

А ТЕПЕРЬ
ОЧЕНЬ ВАЖНЫЙ
МОМЕНТ!



МЫ СМОГЛИ РАЗДЕЛИТЬ
ДВЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
ПО РАЗНЫМ ИНТЕГРАЛАМ.

P

t

ТАКИЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ НАЗЫВАЮТСЯ
С РАЗДЕЛЕННЫМИ
ПЕРЕМЕННЫМИ.

РЕШЕНИЕ БУДЕТ
ВЫГЛЯДЕТЬ ВОТ ТАК:

$$\frac{dP}{dt} = \mu P$$

Делим обе части
на P

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \mu$$

Интегрируем

Исходя из формулы

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

левая часть станет такой:

$$\int \frac{1}{P} dx = \ln|P| + C_1$$

$$\int \frac{1}{P} dP = \mu \int dt$$

$$\mu \int dt = \mu t + C_2$$

Объединим
интегральные
константы

$$\ln|P| = \mu t + C$$

Выразим P

Решение дифференциального
уравнения

$$P(t) = e^{\mu t + C}$$

ОО!!
ПОЛУЧИЛИ
ФУНКЦИЮ!

ПОСКОЛЬКУ P -
ЭТО ЧИСЛЕННОСТЬ ОЛЕНЕЙ
ЗАДО, ТО ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ,
ЧТО ЕГО ЗНАЧЕНИЕ ДОЛЖНО
БЫТЬ БОЛЬШЕ НУЛЯ.



Реальный мир

Мир математики

ИТАК, МЫ РЕШИЛИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ
УРАВНЕНИЕ!



Явление



Рост
численности
олень

Модели-
рование

Модель

$$\frac{dP}{dt} = \mu P$$

ПОЛУЧАЕТСЯ, ЧТО ИЗМЕНЕНИЕ
ЧИСЛЕННОСТИ ОЛЕНЕЙ ЭДЗО
В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВРЕМЕНИ
ОПИСЫВАЕТСЯ
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ
ФУНКЦИЕЙ, ТАК?



В САМОМ
ДЕЛЕ...

Применение

Объяснение
явления

Решение

$$P(t) = e^{\mu t + C}$$

Вычис-
ления

Интер-
претация

4. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

НО
ЭТА ФУНКЦИЯ...

ОЧЕНЬ ТРУДНО ЕЕ
СЕБЕ ПРЕДСТАВИТЬ...

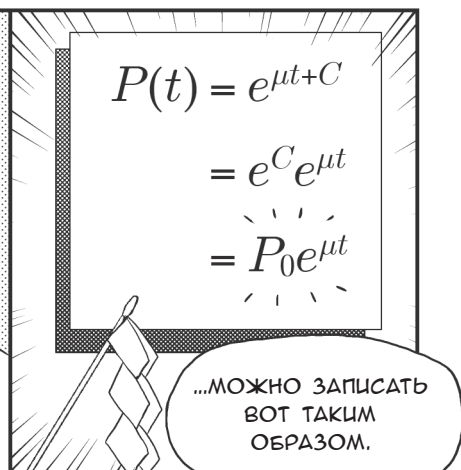
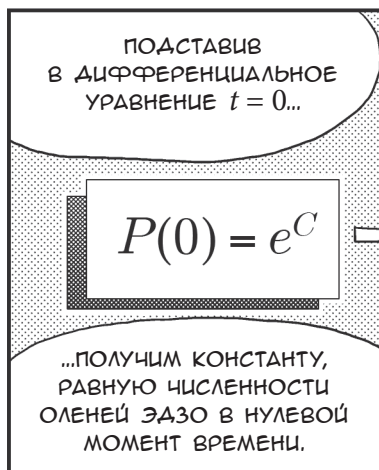
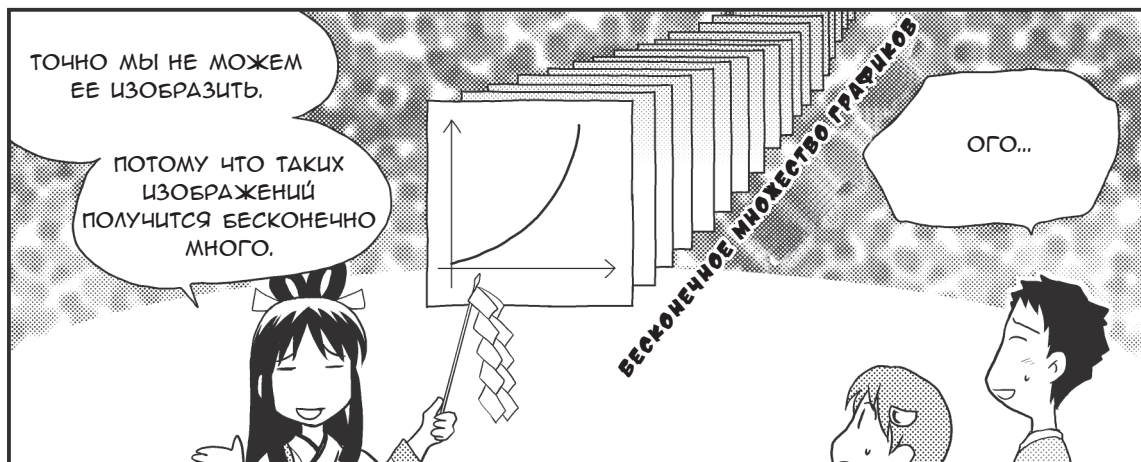
Решение

$$P(t) = e^{\mu t + C}$$

А ЧТО, ЕСЛИ
ПОПРОБОВАТЬ
НАРИСОВАТЬ
ГРАФИК?

НО МЫ НЕ ЗНАЕМ
НИ ЗНАЧЕНИЯ
ПАРАМЕТРА μ ,
НИ ЗНАЧЕНИЯ
ИНТЕГРАЛЬНОЙ
КОНСТАНТЫ C ...

ИМЕННО.



ПОДОБНОЕ P_0 ЗНАЧЕНИЕ
ФУНКЦИИ В МОМЕНТ
ВРЕМЕНИ $t = 0$
НАЗЫВАЕТСЯ НАЧАЛЬНОЕ
СОСТОЯНИЕ.

НАХОДИТЬ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ
В НУЛЕВОЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ
НЕ ВСЕГДА НЕОБХОДИМО, НО...

...ПОСКОЛЬКУ
ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ
С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ЧАСТО ТРЕБУЕТСЯ НА
ОСНОВЕ ЛОКАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ
ПЕРЕЙТИ К ГЛОБАЛЬНОЙ КАРТИНЕ...

$$P(t) = P_0 e^{\mu t}$$

...ТО ДЛЯ ЭТОГО
НЕ РЕАКО
ИСПОЛЬЗУЕТСЯ
НАЧАЛЬНОЕ
СОСТОЯНИЕ
ФУНКЦИИ.

$$P(t) = P_0 e^{\mu t}$$

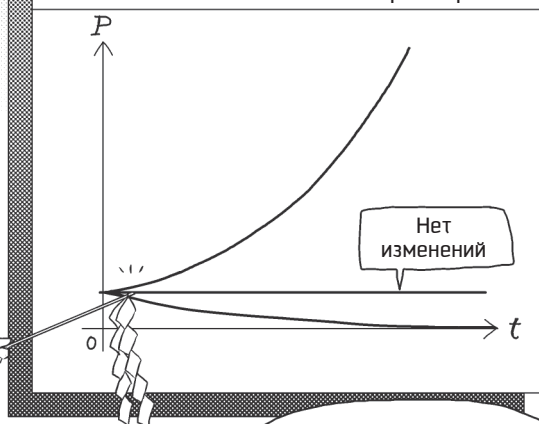
ПОНЯТНО.

ТЕПЕРЬ, КОГДА
МЫ ПОНЯЛИ, ЧТО
ИНТЕГРАЛЬНУЮ
ПОСТОЯННУЮ
МОЖНО ВЫРАЗИТЬ
ЧЕРЕЗ НАЧАЛЬНОЕ
СОСТОЯНИЕ P_0 ,

ПРЕДПОЛОЖИМ
КАКИМИ МОГУТ
БЫТЬ ЗНАЧЕНИЯ
 P_0 И μ ...

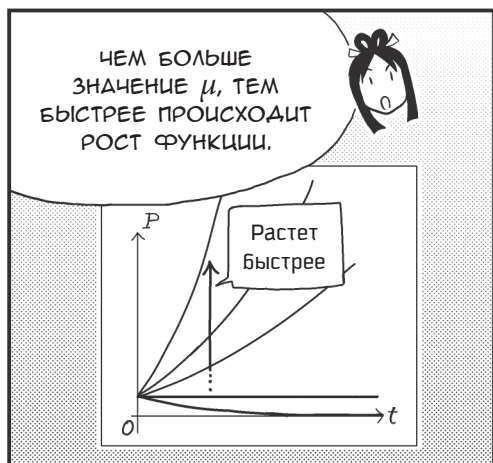
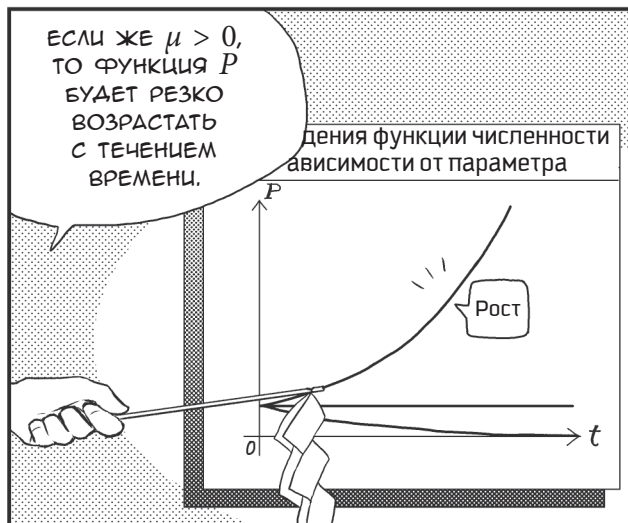
ЕСЛИ $\mu = 0$,
ТО ЗНАЧЕНИЕ P
НЕ МЕНЯЕТСЯ С ТЕЧЕНИЕМ
ВРЕМЕНИ И РАВНО
ЗНАЧЕНИЮ В НУЛЕВОЙ
МОМЕНТ ВРЕМЕНИ - P_0 .

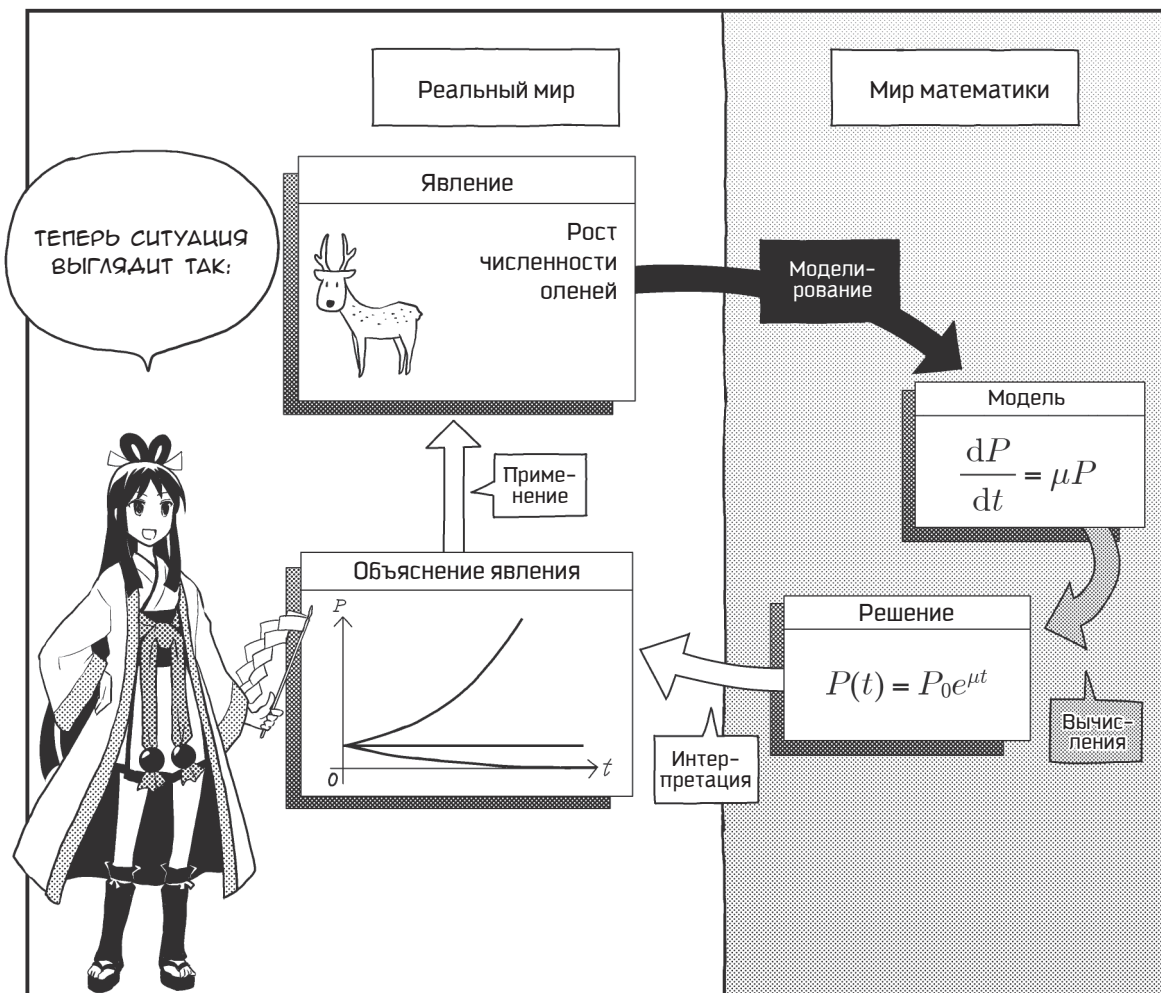
Изменение поведения функции численности
олень в зависимости от параметра



ПОКАЗАТЕЛЬ СТЕПЕНИ
СТАНЕТ НУЛЕВЫМ, ПОЭТОМУ
ЗНАЧЕНИЕ НЕ БУДЕТ
МЕНЯТЬСЯ, ТАК?

И ПОПРОБУЕМ
ИЗОБРАЗИТЬ ГРАФИК
ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ
ЧИСЛЕННОСТИ ОЛЕНЕЙ
 P В ЗАВИСИМОСТИ
ОТ ВРЕМЕНИ t .





ЗДЕСЬ
ПРЕДСТАВЛЕНЫ ДАННЫЕ
ПО ЧИСЛЕННОСТИ
ОЛЕНЕЙ ЭДЗО.

Изменение индекса численности оленей эдзо
в западной части острова Хоккайдо
(данные статистического центра)



Взято из "Публикации об изменении индекса численности оленей эдзо". Обратите внимание, что фактическая численность может отличаться от расчетной из-за погрешности в оценке.

Источник: Департамент по окружающей среде
префектуры Хоккайдо

ИСХОДЯ
ИЗ ЭТИХ ДАННЫХ,
ВЫЧИСЛЯЕМ
ПАРАМЕТР μ .

ОН РАВЕН 0,098.

$$\mu = 0.098$$

ОО!

В 2000 ГОДУ
ЧИСЛЕННОСТЬ ОЛЕНЕЙ
БЫЛА РАВНА ПРИМЕРНО
60 ТЫСЯЧАМ.

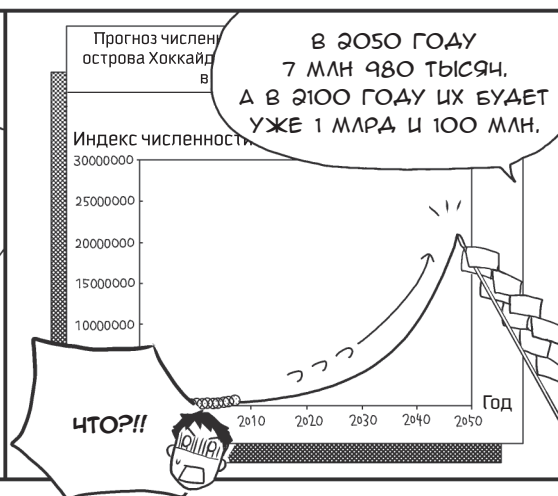
$$P_0 = 6$$

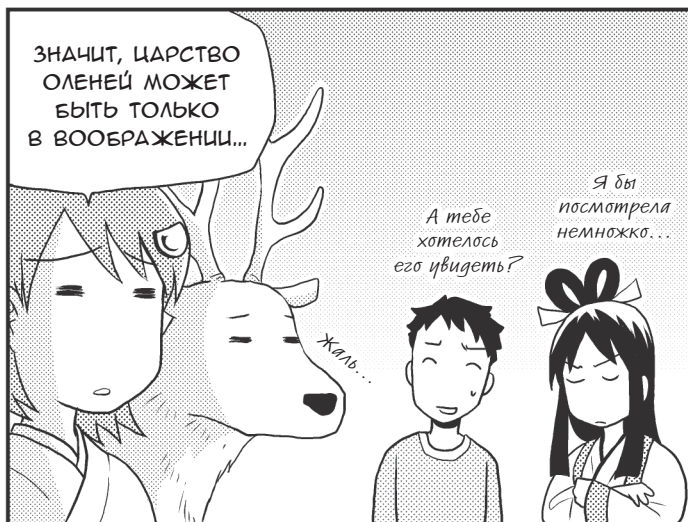


ВОЗЬМЕМ 2000 ГОД
ЗА НАЧАЛЬНЫЙ МОМЕНТ
ВРЕМЕНИ...

ПОНЯТНО.

В ЭТОМ СЛУЧАЕ
НАЧАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ
 P_0 РАВНО 60 ТЫСЯЧАМ.





В ЛЮБОМ СЛУЧАЕ,
ДЕЛО НИКОГДА
НЕ ЗАКАНЧИВАЕТСЯ

ОДНИМ
ПРОГНОЗОМ.

НУЖНО ПРОВЕРЯТЬ, НАСКОЛЬКО
СПРОГНОЗИРОВАННЫЙ
РЕЗУЛЬТАТ СООТВЕТСТВУЕТ
РЕАЛЬНОЙ СИТУАЦИИ.

КАК ТОЛЬКО ПОЯВЛЯЕТСЯ
НЕСООТВЕТСТВИЕ, НУЖНО
ВСЕ ПЕРЕСМОТРЕТЬ
ЗАНОВО.

ПОНЯТНО.

РАССМОТРИМ-КА МЫ
ЕЩЕ ДРУГОЙ ПРИМЕР.

Да!

5. ЗАКОН МАЛЬТУСА

 Когда мы в процессе моделирования перенесли явление из реального мира в мир математики, мы получили абстрактный образ явления в виде формулы. Приняв численность оленей эдзо за P , а время за t :

$$\frac{dP}{dt} = \mu P,$$

получили это дифференциальное уравнение. В этой модели темп прироста численности оленей эдзо dP/dt пропорционален численности оленей P .

 Ага.

 Однако в абстрактном мире математики то, что P – это численность оленей эдзо, не имеет никакого значения.

 То есть мы что, напрасно тратили время?..

 Совсем нет! Я хочу сказать, что тем же самым дифференциальным уравнением могут описываться разные явления реального мира, и P может интерпретироваться по-разному, в зависимости от исследуемого явления. P может обозначать что угодно, если только P и dP/dt пропорциональны.

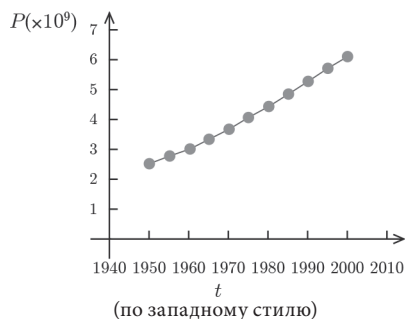
 Например, численность мирового населения или скорость распространения нового товара, да?

 Да, например, еще рост численности бактерий. Таких явлений, когда темп прироста пропорционален численности, довольно много.

 Широко известно, что мировое население постоянно увеличивается, так?

 Речь о демографическом взрыве?

 На самом деле тут проблема не просто в росте численности населения, а в том, что этот рост – экспоненциальный. И даже если бы дело было только в экспоненциальном росте населения, это не проблема, но суть в том, что при этом необходимые человечеству ресурсы не растут экспоненциально.



(по западному стилю)
**Экспоненциальный рост
 мировой численности населения**

Мировая численность населения¹



И в конце концов ресурсов будет не хватать, да?



Да. Например, людям для жизни нужна еда, но производство продуктов питания не растет экспоненциально. А численность населения при этом увеличивается в разы. Чтобы увеличить производство продуктов питания, нужно либо увеличить площадь полей и пастбищ, либо поднять эффективность производства. Регулярно увеличивать в разы площадь полей и пастбищ физически не возможно.



Да уж, это точно...



Как ни старайся, наступит момент, когда земля закончится². А увеличить в разы эффективность производства еще труднее. Другими словами, рост численности населения и рост продуктов питания качественно разные, и поэтому количество продуктов питания на человека начнет снижаться, а в конце концов наступит момент, когда оно станет критически низким³.



Значит, когда-нибудь настанет голод⁴, да?



Первым человеком, кто выявил различия в росте численности населения и производства продуктов питания, был Мальтус.



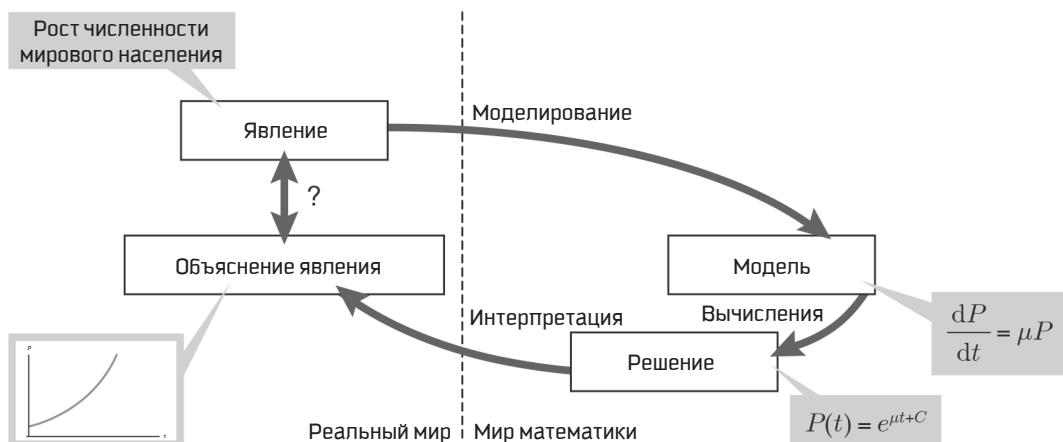
Мальтус?..

¹ Источник данных: ООН.

² Хотя может показаться, что доступной земли на планете еще много, но на самом деле пригодной для сельского хозяйства земли гораздо меньше, чем кажется. И надо помнить, что, кроме самой земли, значение имеют также вода, дневной свет, температура воздуха и т. д.

³ Существуют изменения, которые происходят в арифметической или в геометрической прогрессии. Геометрическая прогрессия – это когда изменения происходят в разы, а арифметическая – когда изменения происходят каждый раз на одно фиксированное число.

⁴ Не «когда-нибудь», а, возможно, уже сейчас. Хотя все человечество не страдает от голода в равной степени, но есть бедные регионы, где проблема голода существует и сегодня.



Моделирование явления роста мирового населения

Закон Мальтуса говорит о том, что темп прироста численности населения пропорционален численности населения. Здесь t – это время, $P(t)$ – численность населения, $dP(t)/dt$ – темп прироста численности населения, μ – коэффициент пропорциональности:

$$\frac{dP}{dt} = \mu P. \quad \leftarrow \text{Дифференциальное уравнение, описывающее рост численности населения}$$

Параметр μ называют **коэффициентом прироста**, а также **коэффициентом Мальтуса**.

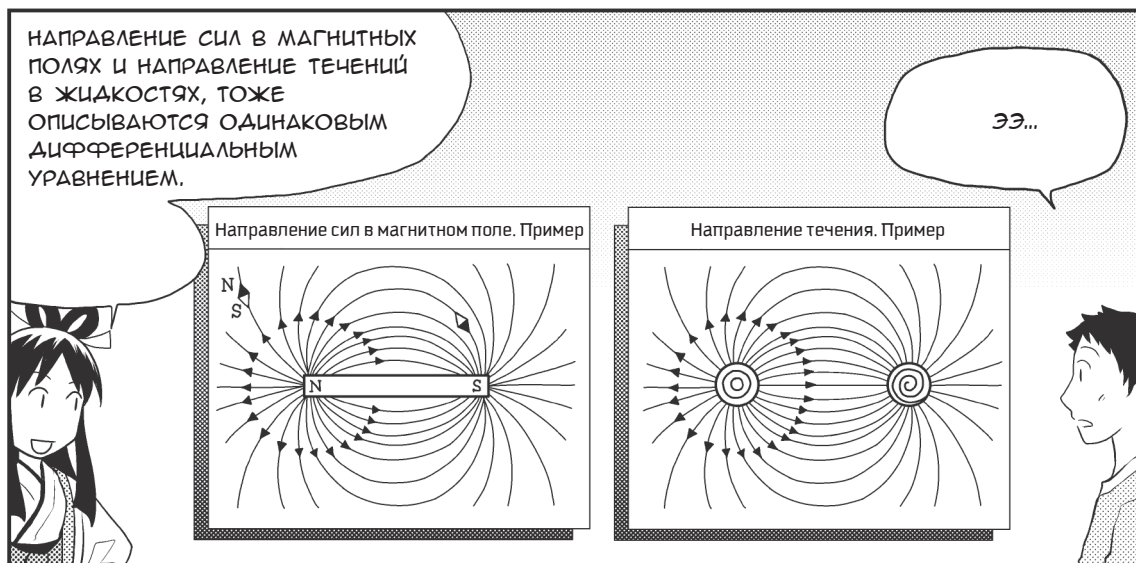
Для микроорганизмов, подобных бактериям, тоже верно утверждение, что темп прироста их численности dP/dt пропорционален численности P . И дифференциальное уравнение будет выглядеть так же:

$$\frac{dP}{dt} = \mu P. \quad \leftarrow \text{Дифференциальное уравнение, описывающее рост численности бактерий}$$

Скорость размножения бактерий довольно большая.

Конечно, по сравнению с людьми, их численность увеличивается очень быстро. Поэтому значение коэффициента роста μ будет значительно выше⁵.

⁵ Например, при благоприятных условиях количество кишечных палочек удваивается за 20–30 минут. Этот промежуток времени называется **период генерации**.





6. РАДИОАКТИВНЫЙ РАСПАД

■ Явление

На Хоккайдо обитает не только множество диких животных, таких как олени эдзо, но и человек проживает на этом острове с очень давних времен. В каждом регионе острова были найдены останки, среди которых есть такие, которым более 10 тысяч лет и которые относятся к палеолиту. Но как же смогли понять, что этим останкам более 10 тысяч лет? В археологии определяют возраст находок по совокупности данных, полученных с помощью анализа слоев почвы (стратиграфия), годовичных колец деревьев и т. д. Сейчас среди методов датировки находок очень эффективным является метод радиоактивного распада¹.

Когда речь заходит о радиации, это сразу ассоциируется с опасностью. Но на самом деле в природе в определенном количестве всегда существуют радиоактивные вещества, и обычно их можно обнаружить вокруг нас². В датировке же часто используется углерод – вещество, которое является одним из основных элементов формирования живых существ, включая человека.

Углерод, участвующий в формировании наших тел, изначально получен из углекислого газа, находящегося в атмосфере, который поглотили в процессе фотосинтеза растения. Если бы существовали такие часы, которые начали бы отсчет времени в тот момент, когда растение поглотило углерод, то можно было бы определить время, когда это растение существовало. Более того, так как животные поедают растения и в процессе поглощают тот самый углерод, то можно было бы определить и возраст животного, поглотившего это растение (и возраст животного, поглотившего это животное, и т. д.). Но ведь таких полезных часов, наверное, не может существовать? А вот и нет, они существуют.

Изотоп углерода³ – углерод-14⁴ $^{14}_6\text{C}$ – образуется в результате реакции в атмосфере азота-14 с поступающей из космоса радиацией, после ее контакта с атомами верхних слоев атмосферы. Углерод-14, взаимодействуя с кислородом, образует углекислый газ, который затем распространяется в атмосфере.

Однако углерод-14 не может долго существовать в неизменном виде. Вскоре он начинает испускать радиацию, и образуется другой химический элемент⁵. Это происхо-

¹ Существуют также метод термолюминисценции, метод электронного парамагнитного резонанса и пр.

² Конечно, есть и радиоактивные вещества, созданные руками человека. А радиоактивные вещества, существующие в природе, в большом количестве тоже опасны. И не только радиоактивные, но и прочие химические вещества, даже если они изначально существуют в природе, это не значит, что они безопасны.

³ Изотопы – химические элементы с одинаковым атомным номером, но разными массовыми числами. Количество протонов у них одинаковое, а нейтронов – разное.

⁴ Углерод с массовым номером – 14. У часто встречающегося углерода $^{12}_6\text{C}$ массовый номер – 12. Атомный номер углерода – 6.

⁵ Происходит β -распад. В результате образуется азот-14.

дит не только с углеродом-14, образование нового химического элемента посредством испускания радиации называется радиоактивным распадом. Изотопы, обладающие такой способностью, называются радиоактивными изотопами (радионуклидами). Радионуклиды распадаются с определенной вероятностью. Так как в процессе распада они образуют другой химический элемент, то количество радионуклидов уменьшается (если извне не добавится новых).

Период времени, за который распадается половина от наличествующих вначале радиоактивных атомов, называется периодом полураспада⁶. И этот период определен для радионуклидов. У углерода-14 период полураспада составляет 5730 лет. Даже если он вступит в реакцию с кислородом и образует углекислый газ, даже если его поглотят растения или животные, распад будет происходить, и каждые 5730 лет количество атомов углерода-14 будет сокращаться вдвое (если не образуются новые).

Как говорилось выше, углерод-14 образуется в верхних слоях атмосферы, однако в процессе распада его количество уменьшается, таким образом количество углерода-14 в атмосфере (в виде углекислого газа) балансируется и всегда примерно одинаково⁷. А также соотношение углерода-14 и углерода-12 в атмосфере постоянно⁸.

У углекислого газа, содержащего углерод-14, и углекислого газа, содержащего углерод-12, химические свойства одинаковые⁹, поэтому они одинаково поглощаются растениями в процессе фотосинтеза. Таким образом, клетки растений, осуществляющие фотосинтез (живые), должны содержать соотношение углерода-12 и углерода-14 такое же, как в атмосфере. Другими словами, пока клетка осуществляет фотосинтез, соотношение содержащихся в ней углерода-12 и углерода-14 постоянно.

Однако, когда клетка перестает осуществлять фотосинтез, углерод-14 перестает поступать в растение из атмосферы, и его количество по отношению к углероду-12 начинает снижаться. Другими словами, как только растение перестает поглощать углекислый газ, запускаются те самые часы. Причинами прекращения фотосинтеза могут быть, например, гибель растения, его одревеснение¹⁰, поглощение животным и т. д. И таким образом, по останкам растения или животного, измерив соотношение углерода-12 и углерода-14, можно определить, когда остановился фотосинтез.

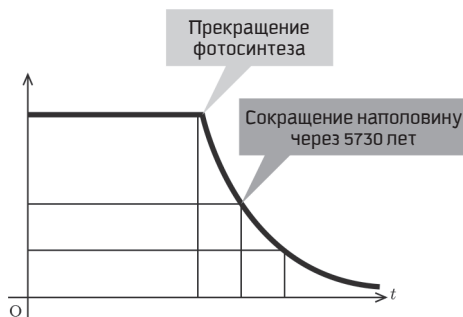
⁶ Существуют радионуклиды, которые распадаются буквально моментально, но существуют и такие, которые распадаются очень долго, например период полураспада у урана-238 (наиболее часто встречающегося в природе) 4,5 млрд лет. А у урана-235 (который используется в атомной энергетике и ядерном оружии) – 700 млн лет.

⁷ Это подобно тому, как если идти вниз по едущему вверх эскалатору, если идти со скоростью, равной скорости эскалатора, будешь все время оставаться на месте.

⁸ Это постоянство определено не идеально точно. Были периоды, когда измерения проводились не очень аккуратно, и некоторые данные являются спорными.

⁹ Физические свойства при этом разные. Например, так как массовое число у углерода-14 больше на 2 нейтрона, то скорость его распространения меньше.

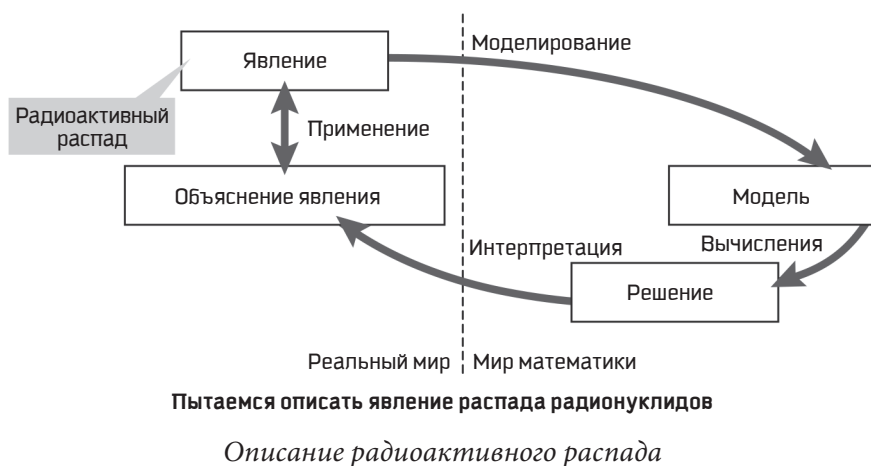
¹⁰ У деревьев, чем ближе к центру годовых колец, тем содержание углерода-14 меньше.



Пока фотосинтез осуществляется, соотношение постоянно, после же прекращения фотосинтеза, через 5730 лет содержание углерода-14 уменьшается вдвое. То есть, измерив соотношение углерода-12 и углерода-14, мы можем понять, когда прекратился фотосинтез.

Содержание в организме углерода-14 по отношению к углероду-12

Однако хотя ранее было сказано, что все радионуклиды распадутся с определенной вероятностью, это не значит, что мы можем узнать про какой-либо конкретный атом радионуклида, когда он распадется. Он может распасться в любой момент, сейчас или через много-много лет. Время распада конкретного атома неопределенно. Но если мы наблюдаем не один атом, а совокупность одинаковых атомов радионуклидов, то в этом случае мы уже можем прогнозировать, какой процент этих атомов через какое время распадется. Другими словами, коэффициент изменения количества атомов (скорость распада) пропорционален количеству атомов. Что? Кажется, где-то уже была похожая фраза. Так и есть, когда мы говорили о модели, описывающей рост численности оленей эдзо, что количество оленей $P(t)$ пропорционально темпу прироста их численности $P(t)/dt$. Вероятно, что и в данном случае мы можем построить математическую модель радиоактивного распада.



■ Модель

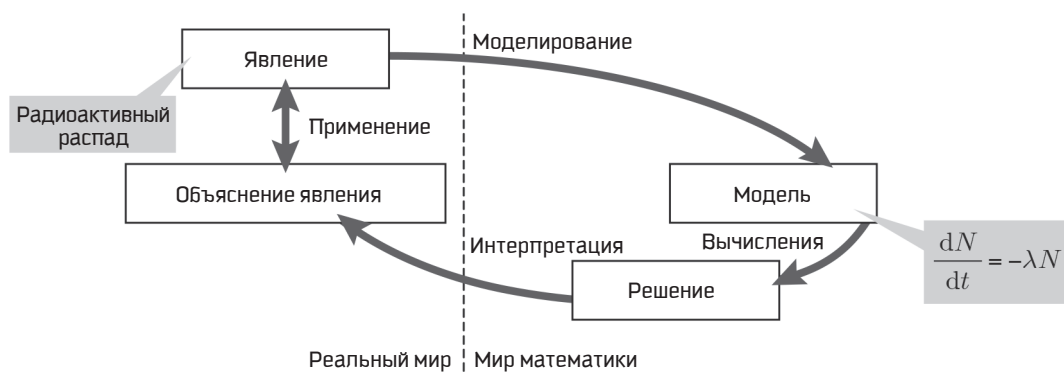
Итак, попробуем создать модель, объясняющую распад радиоактивных веществ. Тут я хочу обратить ваше внимание на то, что нам не важно, «почему» происходит это явление¹¹. Конечно, желание понять причины, почему мы не можем спрогнозировать время распада конкретного атома, понятно. Если есть возможность что-то узнать, это всегда лучше. Однако существует множество явлений, о которых мы знаем, как они происходят, но не знаем, почему. Поэтому отложим на время понимание механизмов явления, а сосредоточимся только на попытке его описания. В процессе многое должно проясниться.

Если мы сможем так смоделировать математически явление, чтобы понимать, при каких условиях оно происходит, наша цель будет достигнута. И хотя мы не знаем механизмов радиоактивного распада, но мы знаем, что изменение численности атомов пропорционально их общему числу, и это мы можем отразить в математической модели.

Обозначим через t время, через $N(t)$ – количество радиоактивных атомов, тогда скорость изменения количества атомов $N(t)/dt$ будет пропорциональна их общему числу $N(t)$. Если это записать в виде формулы, где λ – это коэффициент пропорциональности, то получим:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (3.1)$$

(дифференциальное уравнение, описывающее изменение числа атомов в процессе радиоактивного распада).



На основании того, что изменение количества атомов в результате радиоактивного распада пропорционально количеству атомов, мы можем записать модель в виде дифференциального уравнения, где $dN(t)/dt$ – это коэффициент изменения количества атомов, а $N(t)$ – количество атомов

Модель, описывающая явление радиоактивного распада радионуклидов

¹¹ Это общее замечание, оно касается не только радиационного разложения. То же самое можно сказать и о модели, описывающий численность оленей эдзо.

Так как количество атомов N с течением времени уменьшается, перед коэффициентом λ пропорциональности стоит знак минус¹². Как и в случае с численностью оленей эдзо, мы не можем определить значение параметра λ только на основании модели¹³.

■ Решение

Итак, попробуем решить полученное дифференциальное уравнение. Если сравнить это уравнение с уравнением на стр. 77, формула (3.1) – то мы увидим, что у них общий вид¹⁴. Если же уравнения одного вида, то и решения их будут одинаковыми. Хотя мы уже разобрали решение раньше¹⁵, сейчас решим такое уравнение еще раз, чтобы потренироваться.

Наша задача – получить функцию количества радиоактивных атомов в зависимости от времени – $N(t)$. Посмотрим, где в нашем уравнении находится эта переменная – N .

Зависимая переменная

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

Независимая переменная

Как и прежде, разделим переменные. Поделим обе части уравнения на N :

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = -\lambda.$$

А теперь проинтегрируем обе части:

$$\int \frac{1}{N} dN = -\lambda \int dt.$$

Слева – переменные N , справа – t . Мы разделили переменные по разным частям уравнения.

$$\int \frac{1}{N} dN = -\lambda \int dt.$$

Преобразуем интегралы:

$$\int \frac{1}{N} dN = \ln|N| + C_1;$$

$$-\lambda \int dt = -\lambda t + C_2.$$

¹² Можно, конечно, просто определить, что параметр имеет отрицательное значение, но запись параметра со знаком минус – нагляднее.

¹³ Как будет упомянуто в дальнейшем, скорость распада разных радионуклидов отличается, поэтому и значение параметра λ будет различным.

¹⁴ Общий вид означает, что отличаются только переменные.

¹⁵ Соответствует ситуации на графике на стр. 85, когда $\mu < 0$.

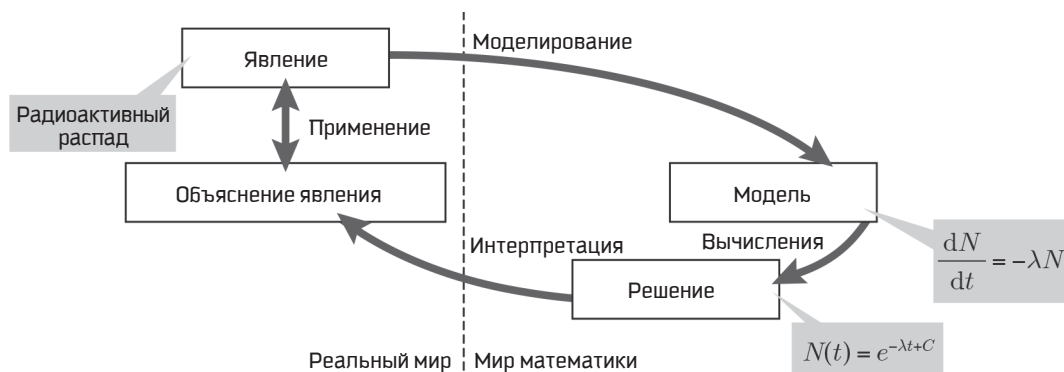
Объединим интегральные константы:

$$\ln|N| = -\lambda t + C.$$

Итого, мы получили функцию количества радиоактивных атомов в зависимости от времени $N(t)$ ¹⁶:

$$N(t) = e^{-\lambda t + C}. \quad \leftarrow \text{Решение дифференциального уравнения} \quad (3.2)$$

Таким образом, мы решили дифференциальное уравнение.



Решив дифференциальное уравнение, выясняем, что изменение количества радиоактивных атомов в зависимости от времени выражается экспоненциальной функцией.

Модель, описывающая явление радиоактивного распада

■ Интерпретация

Теперь определим интегральную константу. Обозначим за $N_0 = N(0)$ количество радиоактивных атомов в нулевой момент времени. Это будет начальное состояние. Из уравнения (3.2) получаем:

$$N(0) = e^C,$$

следовательно:

$$N_0 = e^C.$$

Теперь функцию количества радиоактивных атомов можно представить вот так:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (3.3)$$

Мы разбрались с интегральной константой, теперь можем предположить значение параметра λ и изобразить графически функцию изменения количества радиоактивных атомов N в зависимости от времени t . В нашем случае $\lambda > 0$, поэтому количество атомов будет непременно уменьшаться.

¹⁶ Так как N – это количество радиоактивных атомов, то $N > 0$.

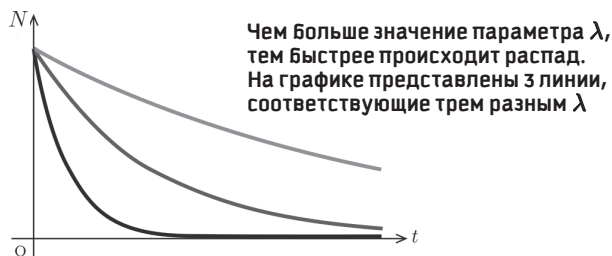
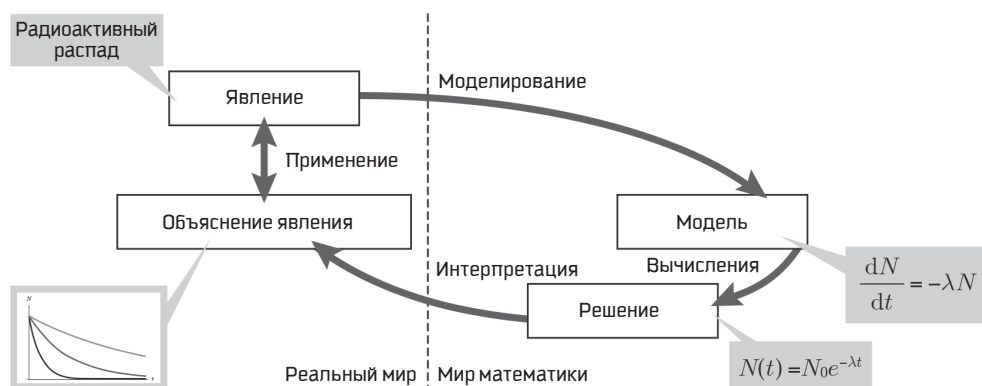


График изменения количества радиоактивных атомов N в зависимости от времени t

Чем больше значение параметра λ , тем быстрее снижается количество атомов (на графике представлены 3 линии, соответствующие трем разным λ). Скорость распада у разных радионуклидов отличается, если скорость распада высокая, то значение параметра λ будет большим, если низкая, то и значение параметра λ будет маленьким. Так как λ показывает скорость распада, его называют **коэффициентом распада**. Вычислив значение коэффициента распада на основе реальных данных, можно понять, в какой момент времени какое количество радиоактивных атомов будет существовать, как в будущем, так и в прошлом.



Определив значение коэффициента распада, можем вычислить, сколько атомов существует в каждый момент времени, можем прогнозировать их количество в будущем

Решение и интерпретация модели, описывающей явление радиоактивного распада

Исследуем связь между периодом полураспада и коэффициентом распада. Обозначим период полураспада как $t_{1/2}$, тогда если в нулевой момент времени количество атомов равно N_0 , то в момент времени $t_{1/2}$ количество атомов будет равно $N_0/2$. Исходя из уравнения (3.3), получаем:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}}.$$

Отсюда следует, что период полураспада $t_{1/2}$ равен:

$$t_{1/2} = \frac{\ln|2|}{\lambda} \sim \frac{0.69}{\lambda}.$$

Другими словами, период полураспада обратно пропорционален коэффициенту распада¹⁷.

Однако то, что мы можем измерить, – это уровень радиации¹⁸. Уровень радиации пропорционален числу радиоактивных атомов¹⁹. Отсюда мы не можем напрямую рассчитать коэффициент распада, но можем рассчитать его, исходя из того, как уменьшается уровень радиации с течением времени.

Наконец, мы дошли до того, как производится датировка с помощью радиоактивных веществ. Радиоактивное вещество, излучая радиацию, распадается в другое химическое вещество, и это изменение происходит соответственно формуле (3.3). Для радионуклидов, у которых известен период полураспада (а значит, и коэффициент распада), если нам известно соотношение N/N_0 , где N – это количество радиоактивных атомов в настоящий момент, а N_0 – количество атомов в прошлом (другими словами, соотношение уровня радиации), то мы можем вычислить временной интервал, прошедший с начального момента:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t};$$
$$\therefore t = \frac{\ln|N/N_0|}{\lambda}.$$

И это замечательно. Это означает, что мы можем определить возраст любых найденных реликтов, для которых известно соотношение N/N_0 ²⁰.

Говоря о найденных при раскопках артефактах, если, к примеру, предмет был изготовлен из дерева, то возможно определить, до какого момента это дерево осуществляло фотосинтез. Период времени, когда дерево было срублено, не обязательно соответствует периоду времени, когда предмет был изготовлен, но этим можно пренебречь. Так как в прошлые эпохи люди вряд ли специально откапывали для использования старую древесину, то можно предположить, что период изготовления предмета соответствует периоду гибели дерева. Если изучить, к примеру, даже валяющиеся рядом щепки, то можно наткнуться на очень древний материал²¹.

¹⁷ Ведь само собой разумеется, что чем выше скорость распада, тем короче период, за который количество атомов уменьшится вдвое.

¹⁸ Для этого часто используют счетчик Гейгера-Мюллера или сцинтилляционный детектор. Для простого определения опасного уровня радиации используется пленочный дозиметр.

¹⁹ Если много радиоактивных атомов, то и уровень радиации высокий.

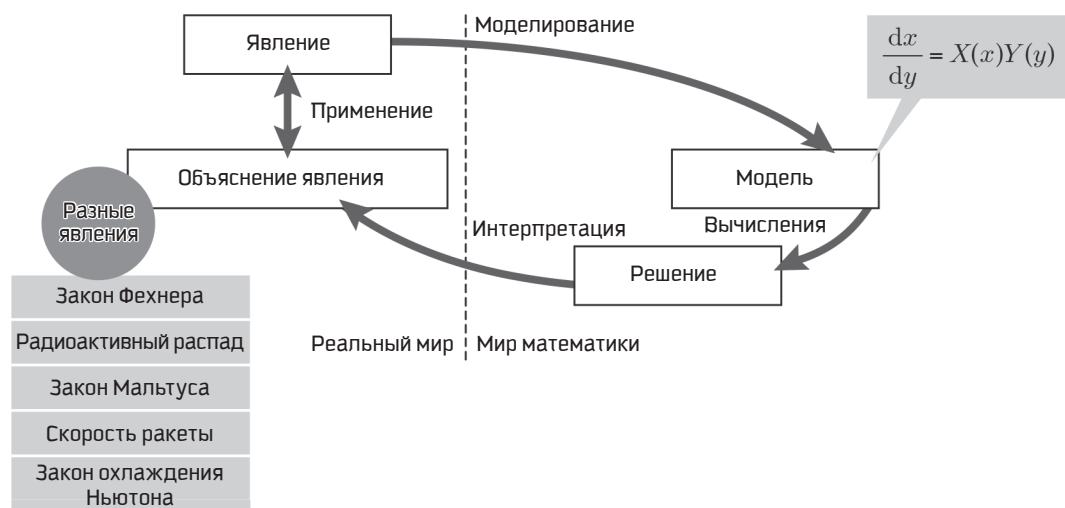
²⁰ Если выражаться точнее, мы можем определить момент, когда прекратился фотосинтез.

²¹ Датировка посредством радионуклидов тем сложнее, чем старше исследуемый материал. Период полураспада углерода-14 – 5730 лет, следовательно, примерно за 6 тыс. лет его количество сократится вдвое, за 12 тыс. лет – в 4 раза, а через 60 тыс. лет останется только 1/1000 от начального количества. А чем меньше количество, тем сложнее делать замеры. С помощью углерода-14 можно датировать период до нескольких десятков тысяч лет. Более древние материалы мы знаем плохо. Однако для камней существует способ датировки более древних материалов.

7. РАЗНЫЕ ЯВЛЕНИЯ, ОДНА МОДЕЛЬ

В предыдущих главах мы увидели, что дифференциальные уравнения одного вида описывают такие разные явления, как закон Мальтуса и радиоактивный распад. А использованный для решения этих дифференциальных уравнений метод разделения переменных является базовым. Суть этого метода в том, что мы разделяем содержащиеся в уравнении две переменные и каждую по отдельности интегрируем. Это довольно простой метод, но он используется для решения дифференциальных уравнений, описывающих различные явления.

Кроме того, описание изменения температуры тела с течением времени при его охлаждении (закон охлаждения Ньютона, см. приложение 1), вычисление скорости ракеты (уравнение Циолковского, см. приложение 2), изменение интенсивности ощущений в зависимости от раздражителя (закон Фехнера, см. приложение 3) и другие явления также описываются дифференциальными уравнениями, которые решаются методом разделения переменных. Разве это не удивительно, что такие разные явления реального мира в мире математики описываются моделями одного вида?

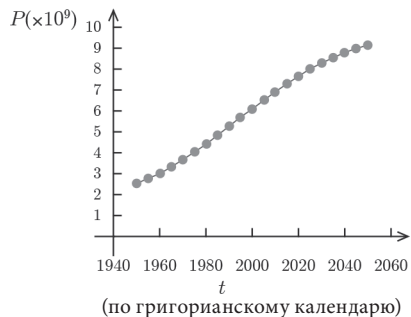


Разные явления, один вид модели

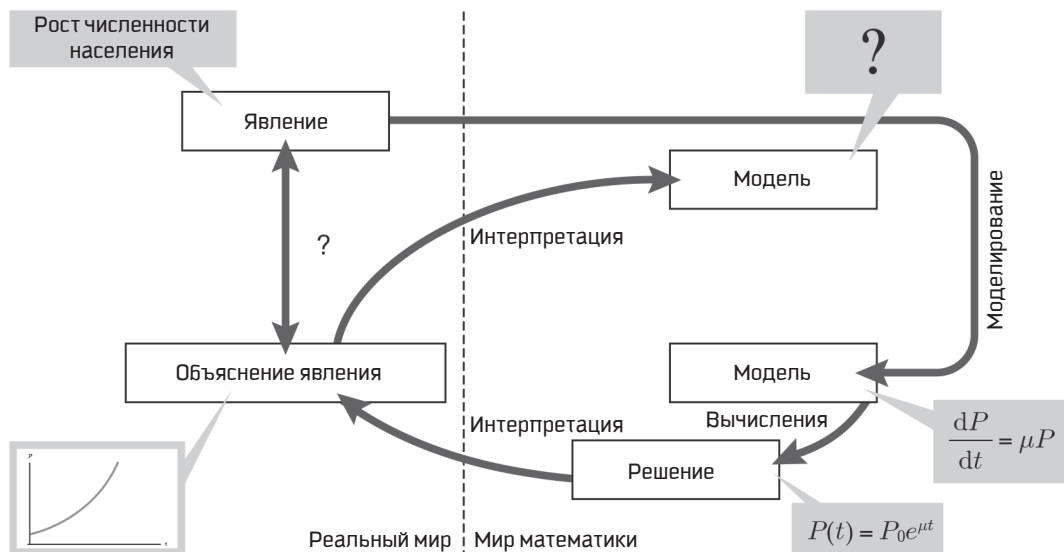
8. ЛОГИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

На стр. 91, когда мы изучали закон Мальтуса, речь шла о том, что численность мирового населения постоянно возрастает. Однако на самом деле с недавних пор темп прироста численности населения снизился.

Если численность населения будет возрастать по экспоненте, то в какой-то момент масса всех людей на планете превысит массу планеты. А это уж точно никак не может быть. Закон Мальтуса может описать явление в локальном масштабе, но рано или поздно он начинает расходиться с реальностью.



Население планеты (прогноз)²²



В построенной ранее модели роста численности населения коэффициент прироста возрастает, а в реальности он начал уменьшаться. Поскольку нас не удовлетворяют результаты, полученные в рамках этой модели, ее нужно скорректировать

Корректировка модели роста численности населения

²² Источник данных: ООН.

Это касается не только человека. Так, при культивации бактерий их численность сначала увеличивается экспоненциально, но когда с ростом численности доступ к питательной среде затрудняется, то темп роста численности бактерий замедляется²³. Поэтому если мы хотим использовать модель более широко, то ее необходимо корректировать.

Когда мы хотим описать некое явление, мы переносим его из реального мира в мир математики, получаем там результат и, интерпретировав его, пытаемся объяснить явление. Если результат нас удовлетворяет, то на этом все заканчивается, в противном случае необходимо скорректировать построенную модель и снова провести вычисления и проверить результаты. Таким образом, мы должны получать с каждым разом все более точные результаты. До какой степени точности нужно продолжать? Пока не будет полного понимания. Пройдя еще один круг моделирования, мы каждый раз улучшаем результат, и если он нас все еще не удовлетворяет, идем на новый круг.

Рассмотрим ситуацию с ростом численности населения. С ростом количества людей увеличивается и их влияние на условия жизни²⁴. Когда условия жизни ухудшаются (жизнь становится сложнее), то и темп прироста снижается. Попробуем переписать коэффициент Мальтуса так, чтобы он снижался при росте численности населения. К здесь константа:

$$\mu \left(1 - \frac{P}{K} \right).$$

Тогда дифференциальное уравнение будет выглядеть так:

$$\frac{dP}{dt} = \mu \left(1 - \frac{P}{K} \right) P \quad (3.4)$$

(скорректированное дифференциальное уравнение, описывающее рост численности населения).

Как же будет выглядеть кривая, полученная в результате решения этого дифференциального уравнения?

Попробуем преобразовать правую часть уравнения, чтобы вывести K в знаменатель.

$$\frac{dP}{dt} = \mu \frac{(K - P)P}{K}.$$

Может, это выглядит не очень понятно, но зато теперь можно применить метод разделения переменных:

$$\frac{dP}{dt} = \mu \frac{(K - P)P}{K}.$$

Вот что получится в итоге:

$$\int \frac{dP}{(K - P)P} = \frac{\mu}{K} \int dt.$$

²³ Процесс роста численности состоит из нескольких фаз.

²⁴ Речь о проблемах окружающей среды.

Теперь хочется проинтегрировать обе части, но если с правой частью уравнения все понятно, то левая часть вызывает затруднения. Для таких случаев существует удобный метод. Преобразуем подынтегральную функцию в левой части:

$$\frac{1}{(K-P)P} = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K-P} \right).$$

Мы произвели действие, обратное сокращению. Это называется **разложение на простые дроби**.

$$\frac{1}{K} \left(\int \frac{1}{P} dP + \int \frac{1}{K-P} dP \right) = \mu \int dt.$$

Теперь мы можем проинтегрировать каждый элемент как обычно. Во втором интеграле в скобках обозначим за $s = K - P$, тогда, исходя из того, что $ds/dP = -1$, получаем:

$$\int \frac{1}{K-P} dP = \int \frac{1}{s} \frac{dP}{ds} ds = - \int \frac{1}{s} ds = -\ln s = -\ln(K-P).$$

Это называется **интегрирование подстановкой**. Полная формула теперь выглядит так²⁵:

$$\ln P - \ln(K-P) = \mu t + C.$$

Исходя из свойств логарифмов, получаем:

$$\ln \left(\frac{P}{K-P} \right) = \mu t + C.$$

Преобразуем в экспоненциальную функцию:

$$\frac{P}{K-P} = e^{\mu t + C}.$$

Теперь отсюда можем выразить P :

$$P(t) = \frac{Ke^{\mu t + C}}{1 + e^{\mu t + C}} \quad \leftarrow \text{Решение скорректированного дифференциального уравнения} \quad (3.5)$$

Это наша итоговая функция.

Если за P_0 обозначим численность населения в момент времени $t = 0$, то:

$$P_0 = \frac{Ke^C}{1 + e^C},$$

то есть:

$$e^C = \frac{P_0}{K - P_0}.$$

²⁵ P и $(K - P)$ – положительные значения.

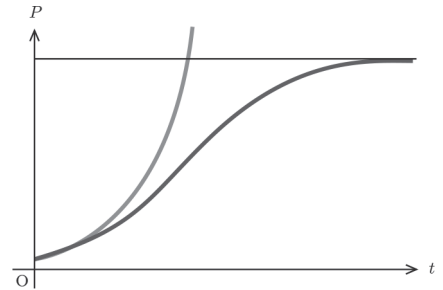
Если подставить это в формулу (3.5), получим:

$$P(t) = \frac{KP_0 e^{\mu t}}{K + P_0(e^{\mu t} - 1)}. \quad (3.6)$$

Полученное решение довольно сложное. Но тут есть хитрость, нужно рассмотреть крайние значения. Например, если в формуле (3.6) подставить $t = 0$, то получим $P(0) = P_0$. Это понятно, так как это и есть начальное состояние. Теперь попробуем подставить предельное значение $t \rightarrow \infty$. Для наглядности умножим числитель и знаменатель в правой части формулы (3.6) на $e^{-\mu t}$:

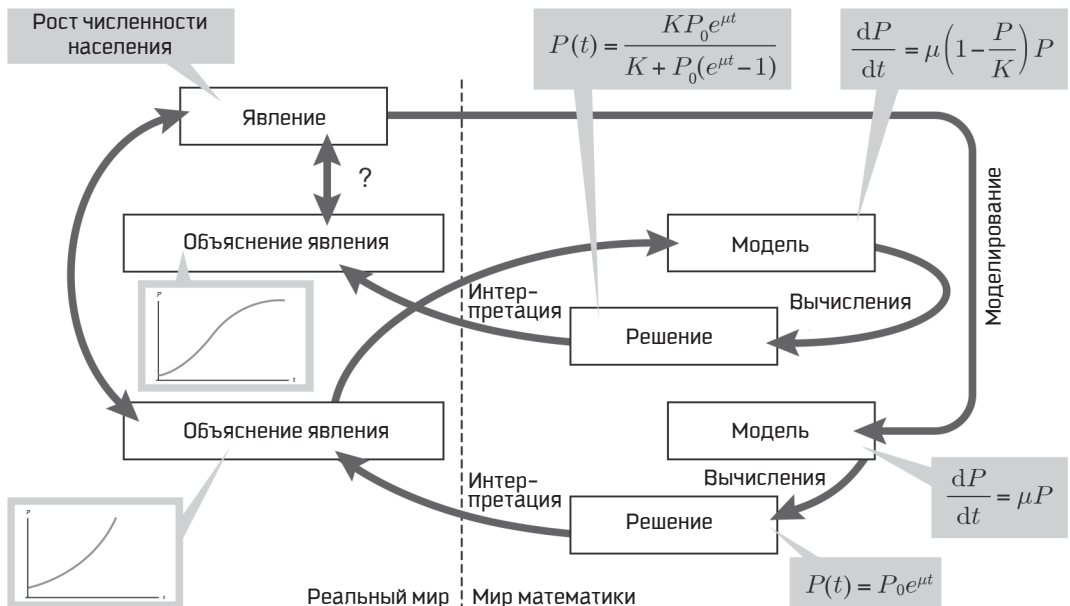
$$P(t) = \frac{KP_0}{(K - P_0)e^{-\mu t} + P_0}, \quad (3.7)$$

то есть при $t \rightarrow \infty$ получается, что $P_\infty = K$. Другими словами, получаем кривую, которая из точки $P(0) = P_0$ возрастает, а потом начинает стремиться к K . Попробуем ее изобразить.



В первоначальной модели рост происходил по экспоненте (бледная линия), в скорректированной – темп роста замедляется, и кривая стремится к константе

Кривая решения скорректированной модели роста численности населения



Дважды пройдя цикл моделирования, получили нужный результат

Скорректированная модель роста численности населения

Такая модель называется логистической. Она хорошо описывает не только рост численности населения, но и распространение производственных товаров.

В этой главе мы рассмотрели метод разделения переменных для решения дифференциальных уравнений. Давайте обобщим.

Дифференциальные уравнения 1-го порядка:

$$\frac{dx}{dy} = F(x)G(y). \quad (3.8)$$

В правой части уравнения находится произведение двух функций от разных переменных: $F(x)$ и $G(y)$. В уравнениях такого вида мы можем разделить переменные x и y по разным сторонам уравнения, этот способ решения называется **методом разделения переменных**.

Делим обе части уравнения (3.8) на $G(y)$:

$$\frac{1}{G(y)} \frac{dy}{dx} = F(x).$$

Интегрируем обе части по x :

$$\int \frac{1}{G(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int F(x) dx + C.$$

В правой части осуществляем интегрирование подстановкой:

$$\int \frac{1}{G(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{1}{G(y)} dy.$$

Обозначив за C интегральную константу, в результате получаем:

$$\int \frac{1}{G(y)} dy = \int F(x) dx + C. \quad (3.9)$$

Теперь в левой части у нас переменная y , дифференциал y и функция $G(y)$ только от переменной y , в правой же части имеем переменную x , дифференциал x и функцию $F(x)$ только от переменной x . Таким образом, мы разнесли переменные по разным частям уравнения. Теперь остается только проинтегрировать обе части. Возможно, решить такое уравнение будет не просто, но с помощью компьютера это возможно. Поэтому если удалось привести уравнение к виду (3.9), то можно считать, что задача решена²⁶.

Метод разделения переменных является базовым при решении дифференциальных уравнений, так как если в уравнении можно разделить переменные, это означает, что его можно решить. Иногда с первого взгляда не понятно, можно ли использовать метод разделения переменных, в этом случае можно попробовать осуществить замену переменных. Это может быть очень интересно – решать такие уравнения с самого начала, подобно складыванию пазла, но все-таки прежде всего лучше изучить опыт предшественников.

²⁶ Иногда достаточно только привести уравнение к виду (3.9).

ГЛАВА 4

НЕОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ ПАДАЮЩЕ ОБЛАКА



НУ И ТУМАННО
СЕГОДНЯ...

В ТАКУЮ ПЛОХУЮ ПОГОДУ
ПОСЕТИТЕЛЕЙ ДОЛЖНО БЫТЬ
МАЛО И СВОБОДНОГО ВРЕМЕНИ
ВСЕ БОЛЬШЕ...

ОПЯТЬ ОН ПРИШЕЛ!

ГОВОРЮ ЖЕ,
ЭТО НЕ МОЯ
СПЕЦИАЛИЗАЦИЯ...

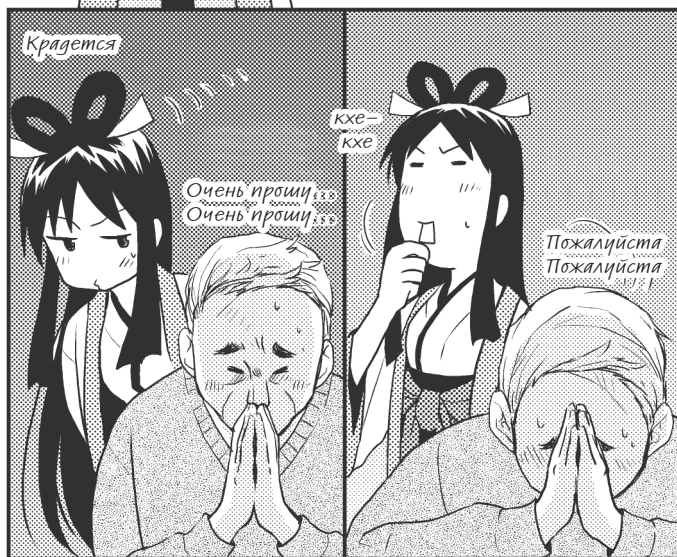
В такую - то погоду,
как сегодня!

Пусть дела в магазине идут хорошо.
Пусть жена вернется.

появлен...

.....

ПРОСТО У МЕНЯ
ХОРОШЕЕ
НАСТРОЕНИЕ.



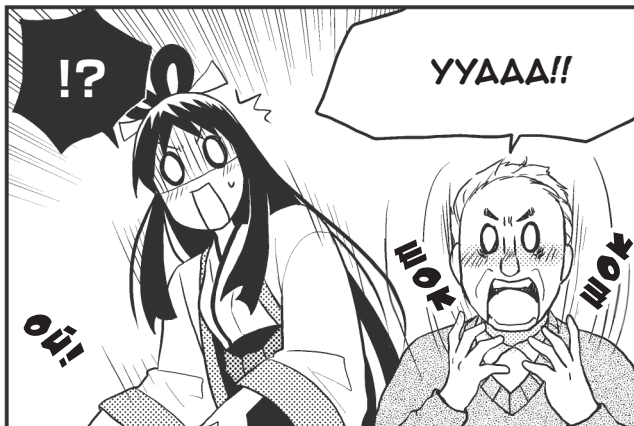
Крадется

Кхе-
кхе

Очень прошу,
Очень прошу,

Пожалуйста
Пожалуйста

НЕ СААВАЙСЯ!

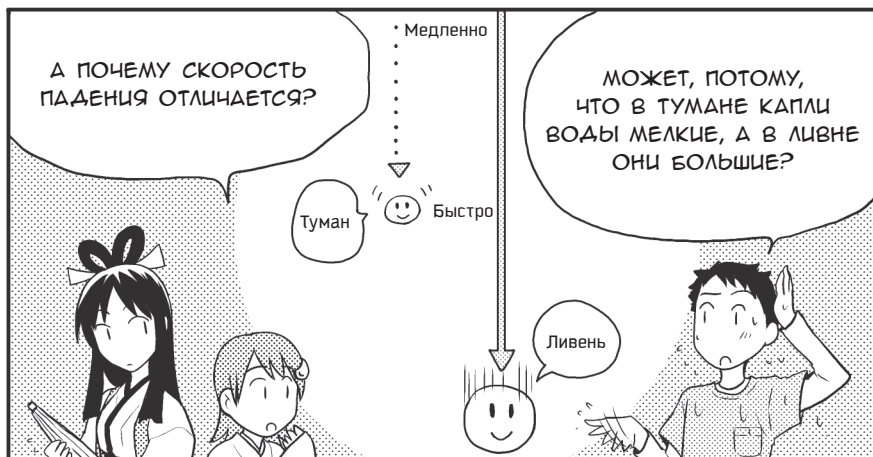
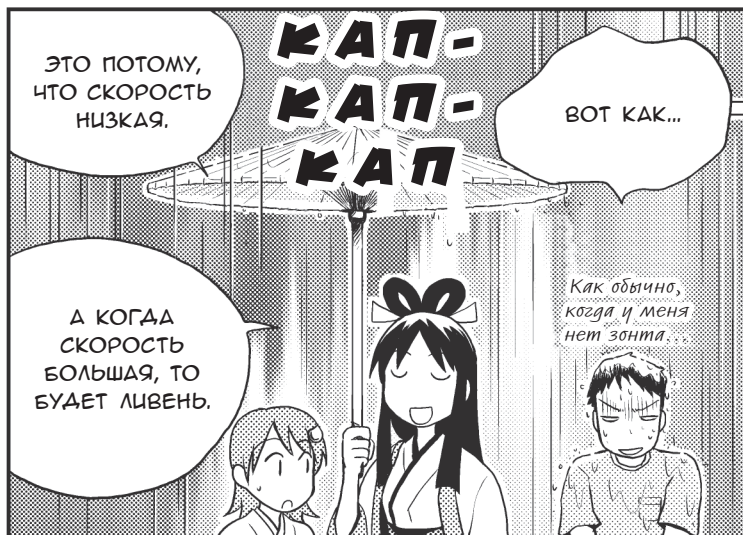


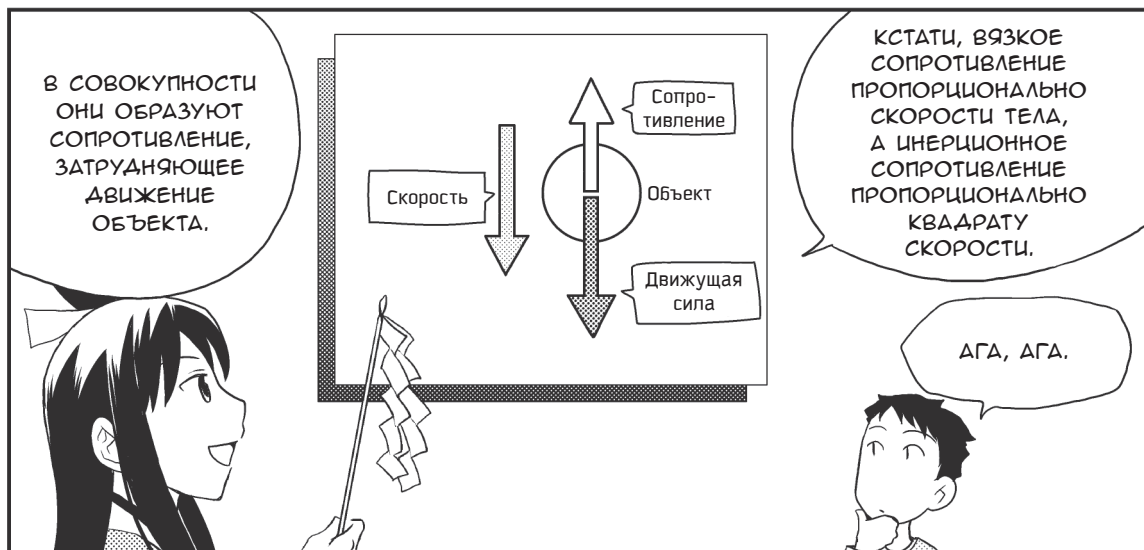
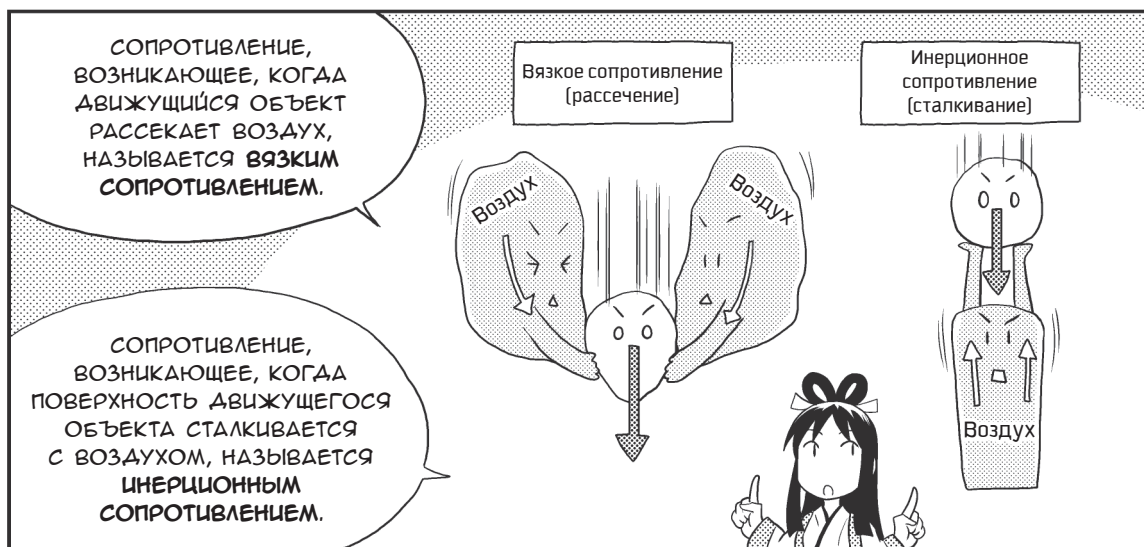


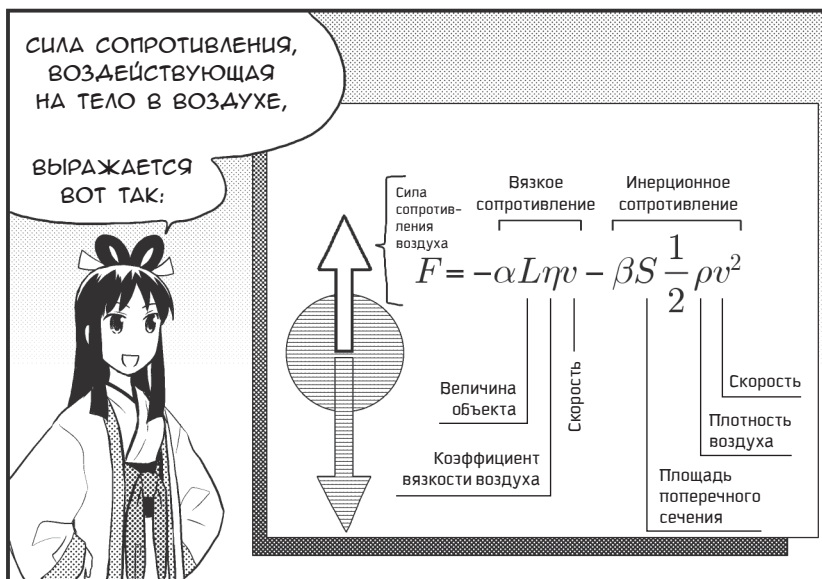


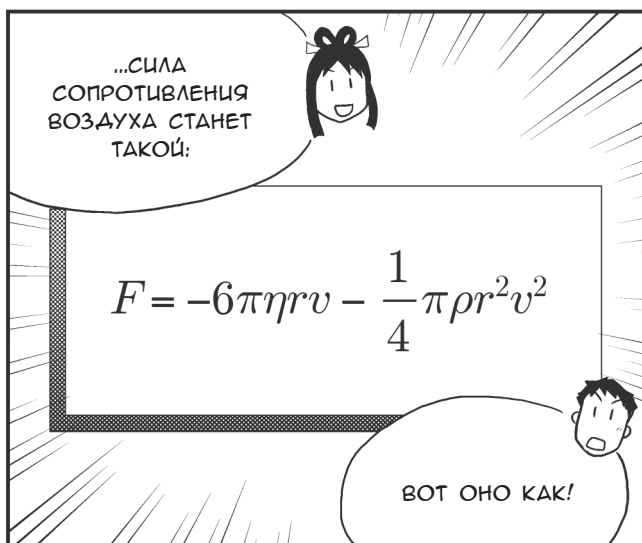
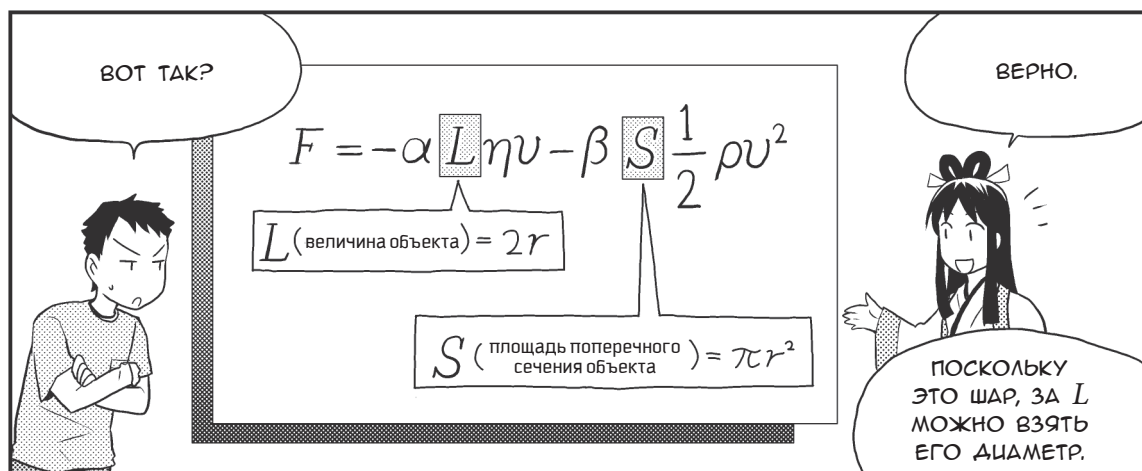
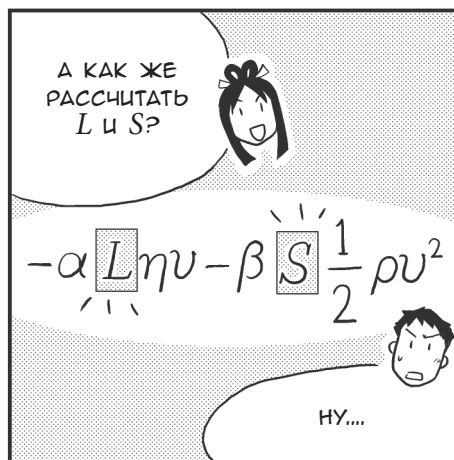
1. ЯВЛЕНИЕ











КСТАТИ ГОВОРЯ,

В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ
ЕСЛИ ОБЪЕКТ МАЛЕНЬКИЙ,
И ДВИЖЕТСЯ ОН МЕДЛЕННО
В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ, ТО БОЛЕЕ
ВЕСОМЫМ БУДЕТ ВЯЗКОЕ
СОПРОТИВЛЕНИЕ.

Сопротивление

Медленно

Сопротивление

ЕСЛИ ЖЕ ОБЪЕКТ
БОЛЬШОЙ И ОН
ДВИЖЕТСЯ БЫСТРО
И ЛЕГКО В МАЛОВЯЗКОЙ
СРЕДЕ, ТО ВЕСОМЕЕ
БУДЕТ ИНЕРЦИОННОЕ
СОПРОТИВЛЕНИЕ.

Быстро

Сопротивление

КАЖЕТСЯ,
Я ПОНИМАЮ...

ДА?

ХИ-ХИ

Угу,
угу

ТОГДА ЧТО БУДЕТ
В СЛУЧАЕ КАПЕЛЬ
ДОЖДА?

НУ...

ЭТО...

ДЛЯ ДАВЛ

БУДЕТ...

ВЯЗКОЕ... ДА?

ХИ-ХИ-ХИ

Смеется
Госпожа
богиня,
кажется,
развеселилась

ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ЭТОГО СУЩЕСТВУЕТ
ОСОБЫЙ ИНДЕКС,

НАЗЫВАЕМЫЙ
ЧИСЛОМ
РЕЙНОЛЬДАСА.

ДЛЯ НАЧАЛА НАЙДЕМ
СООТНОШЕНИЕ
ИНЕРЦИОННОГО
СОПРОТИВЛЕНИЯ
ПО ОТНОШЕНИЮ
К ВЯЗКОМУ.

$$\frac{\frac{1}{4}\pi\rho r^2 v^2}{6\pi\eta r v} = \frac{\rho r v}{24\eta}$$

ПОЛУЧИМ
ВОТ ЧТО.

ВЕРНЕМСЯ
К ОБОЗНАЧЕНИЮ
ВЕЛИЧИНЫ ОБЪЕКТА
КАК L ВМЕСТО $2r$.

$$\frac{\rho r v}{24\eta} = \frac{1}{48} \frac{L\rho v}{\eta}$$

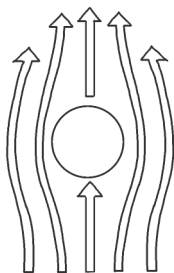
ВОТ ЧТО
ПОЛУЧИМ.

ПОЯВИВШАЯСЯ
ЗДЕСЬ ДРОБЬ
 $L\rho v/\eta$...

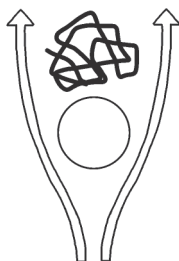
$$= \frac{1}{48} \left(\frac{L\rho v}{\eta} \right)$$

...И НАЗЫВАЕТСЯ
ЧИСЛОМ РЕЙНОЛЬДСА.

Значение числа
Рейнольдса маленькое,
порядка 0,001



Значение числа
Рейнольдса большое,
порядка 1000



ЕСЛИ ЧИСЛО
РЕЙНОЛЬДСА МАЛЕНЬКОЕ,
ТО ВЯЗКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ
БОЛЕЕ АКТИВНО, ЕСЛИ БОЛЬШОЕ,
ТО ЭФФЕКТ БОЛЬШЕ ОТ
ИНЕРЦИОННОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ.

ОО!!

ДЛЯ АТМОСФЕРЫ
ЗНАЧЕНИЯ ρ И η СЛЕДУЮЩИЕ:

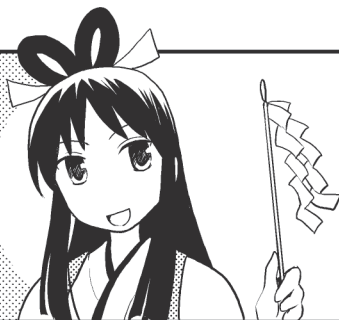
$$\rho = 1,2 \text{ кг/м}^3;$$

$$\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}.$$

ЕСЛИ, НАПРИМЕР,
 $L = 0,1 \text{ мм}$, ТО МЫ
МОЖЕМ РАССЧИТАТЬ,
КАКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ,
ВЯЗКОЕ ИЛИ ИНЕРЦИОННОЕ,
БУДЕТ СИЛЬНЕЕ ВЛИЯТЬ
НА ОБЪЕКТ.

В САМОМ
ДЕЛЕ...

ВЕЛИЧИНА КАПЕЛЬ
ДОЖДА И ЧАСТИЦ
ВОДЫ В ОБЛАКЕ
ТАКОВА:



	Радиус
Дождевая капля	1000 мкм* [= 1 мм]
Частица воды в облаке	10 мкм [= 0,01 мм]

* 1 мкм = 10^{-6} м.

ТАК СИЛЬНО
ОТЛИЧАЮТСЯ...

РАЗНИЦА
КАК РАЗ
КАК МЕЖДУ
КАПЛЕЙ ДОЖДА
И ЧАСТИЦЕЙ ВОДЫ
В ОБЛАКЕ.

Фитбол

ИМЕННО.

Между прочим,
диаметр этого
гимнастического
мяча – 60 см

Частица
воды
в облаке

Пилка
в страйкболе

Дождевая
капля

2. МОДЕЛЬ

ИТАК, ПОПРОБУЕМ
СМОДЕЛИРОВАТЬ ПАДЕНИЕ
КАПЛИ ВОДЫ, ПРИМЕРНО
ТАКОЙ, КАК ЧАСТИЦА
ВОДЫ В ОБЛАКЕ.

ПРЕЖДЕ ВСЕГО
ВЫВЕДЕМ УРАВНЕНИЕ
ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ПАДАЮЩЕГО
В ВОЗДУХЕ ВЕРТИКАЛЬНО
ВНИЗ ТЕЛА.

$$m \frac{dv}{dt} = mg - 6\pi\eta r v - \frac{1}{4} \pi \rho r^2 v^2$$

ЕГО МОЖНО
ЗАПИСАТЬ ВОТ ТАК.

МОЖНО
НАРИСОВАТЬ
СХЕМУ.

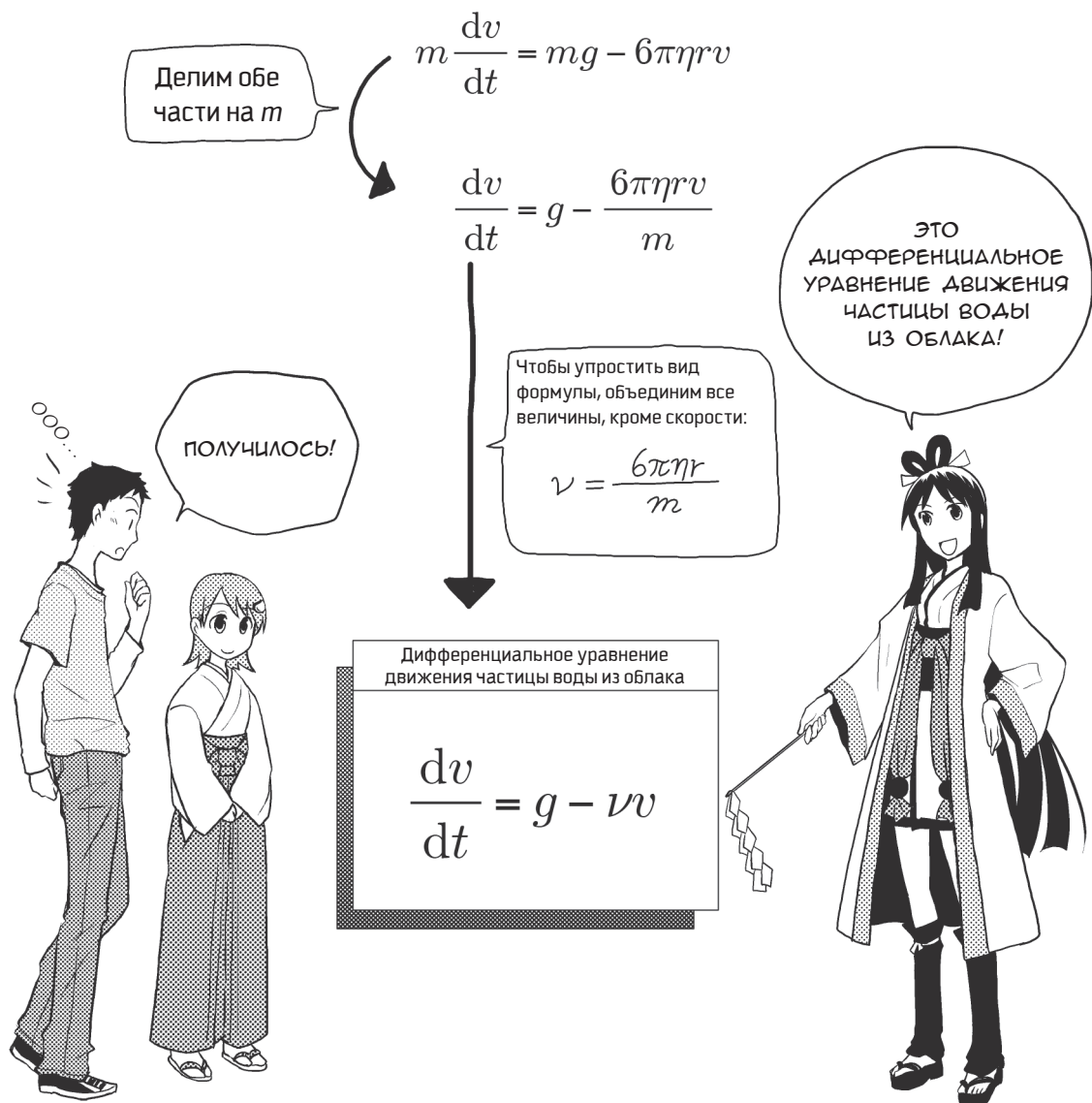
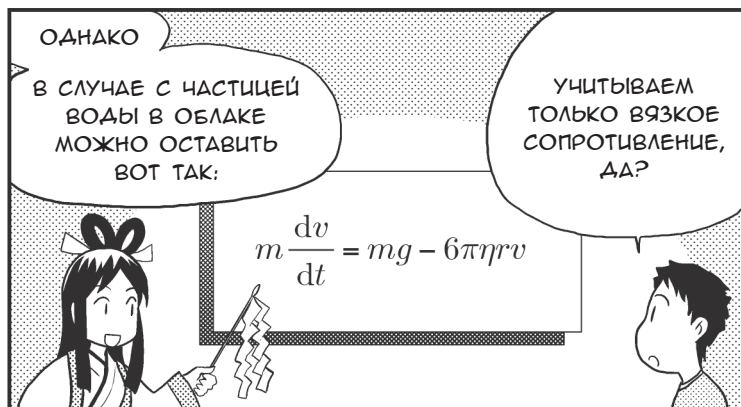
При падении
вертикально
вниз

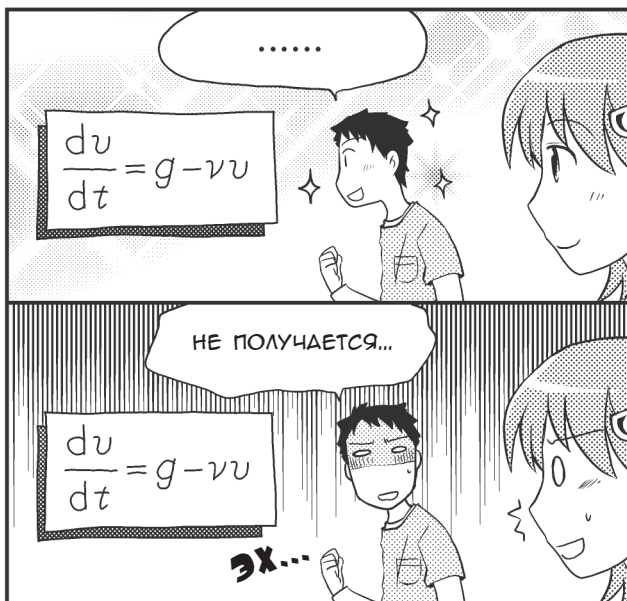
Скорость
 v

УГУ.

Сопротивление
 $-6\pi\eta r v - \frac{1}{4} \pi \rho r^2 v^2$

Сила тяжести
 mg





ДРУГИМИ СЛОВАМИ,
СКОРОСТЬ ОБЪЕКТА
МЕНЯЕТСЯ ПОД
ВЛИЯНИЕМ СИЛ,
ЗАПИСАННЫХ
В ПРАВОЙ ЧАСТИ.

ТАКИМ
ОБРАЗОМ,

$$\frac{dv}{dt} = g - vv$$


ЭТО ДЕМОНИСТРИРУЕТ,
ЧТО СКОРОСТЬ
ОБЪЕКТА МЕНЯЕТСЯ
В ЗАВИСИМОСТИ ОТ
ДВУХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ -
 g И $-vv$.



ИЗ ЭТИХ ДВУХ ПАРАМЕТРОВ
 g - ЭТО КОНСТАНТА,
РАВНАЯ УСКОРЕНИЮ
СИЛЫ ТЯЖЕСТИ,

А $-vv$ - ЭТО ФУНКЦИЯ ОТ
СКОРОСТИ ОБЪЕКТА (КАПЛИ)
 v , ПРОПОРЦИОНАЛЬНАЯ
СКОРОСТИ.

ЭЭ...
ТО ЕСТЬ...



ХОРОШО...

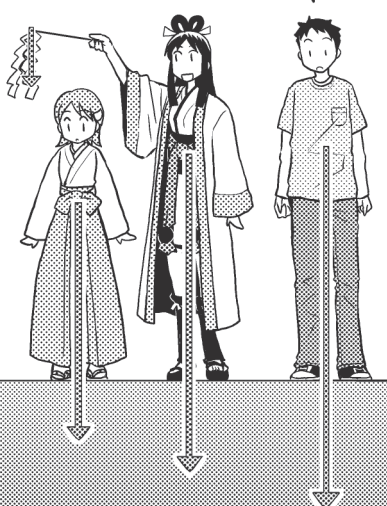
ДАВАЙ ПОСМОТРИМ
НА ВЕЩИ С ТОЧКИ
ЗРЕНИЯ ФИЗИКИ.

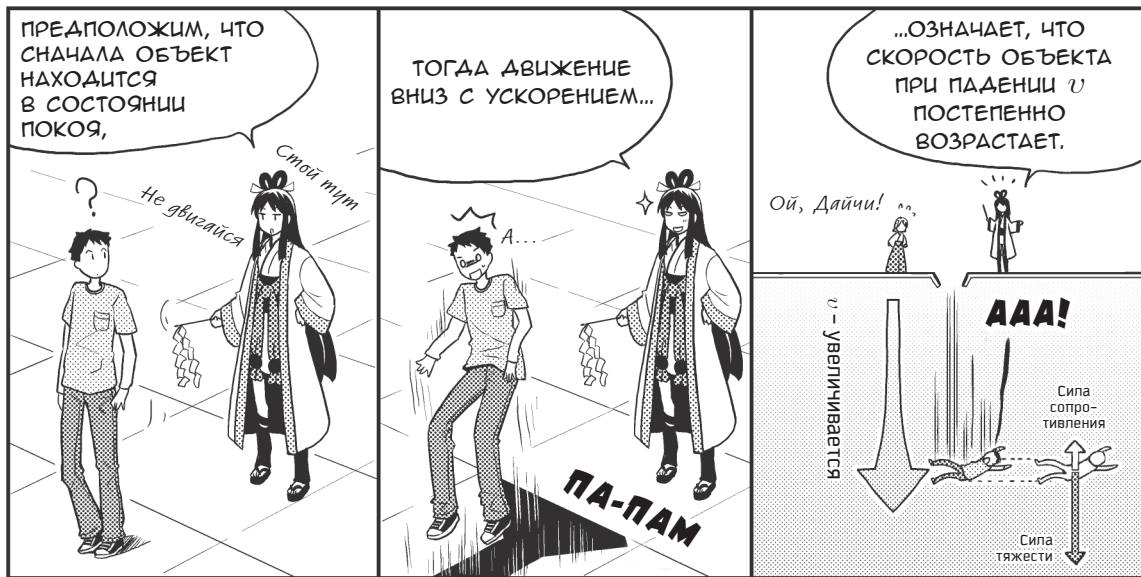


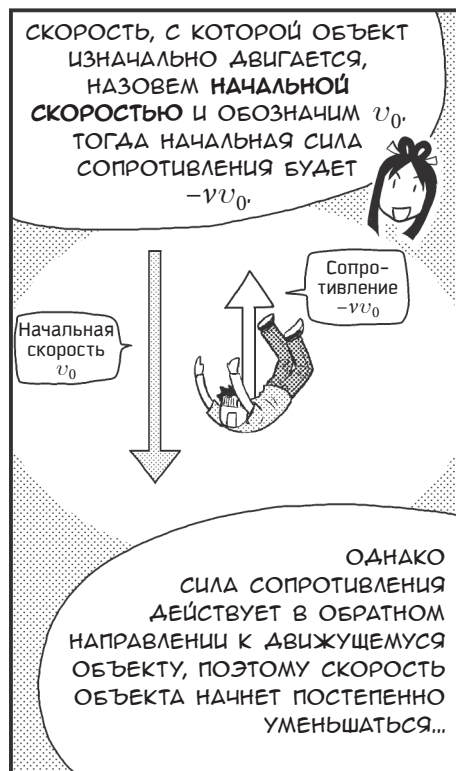
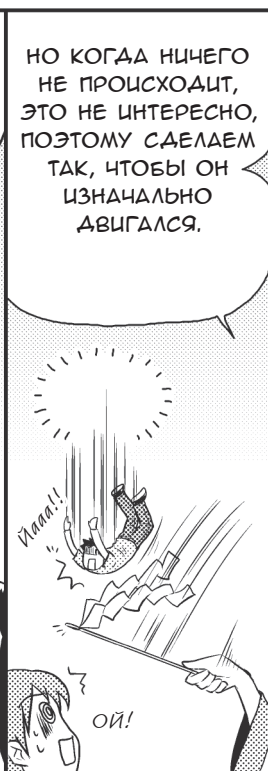
ПЕРВЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ -
КОНСТАНТА g - ЭТО
ВОЗДЕЙСТВУЮЩАЯ НА
ОБЪЕКТ ПОСТОЯННАЯ
СИЛА ТЯЖЕСТИ.

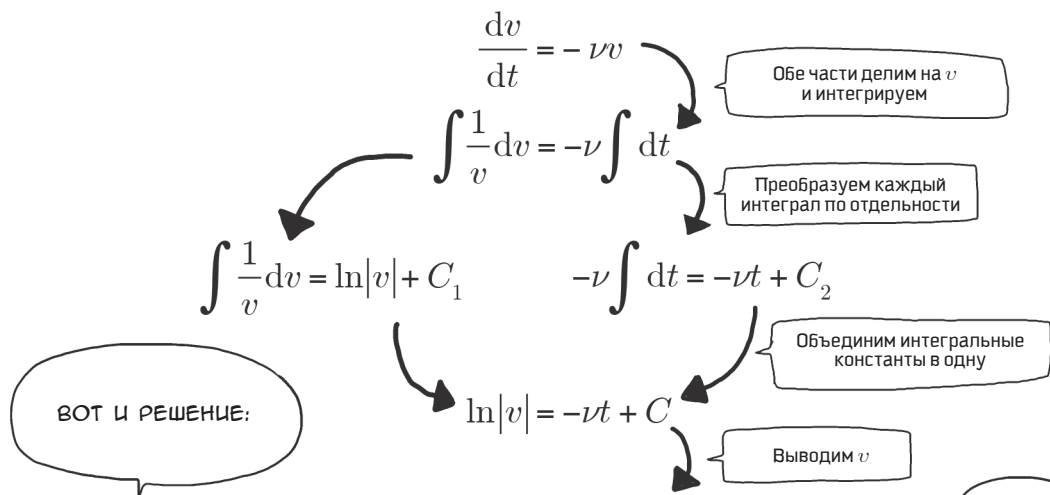
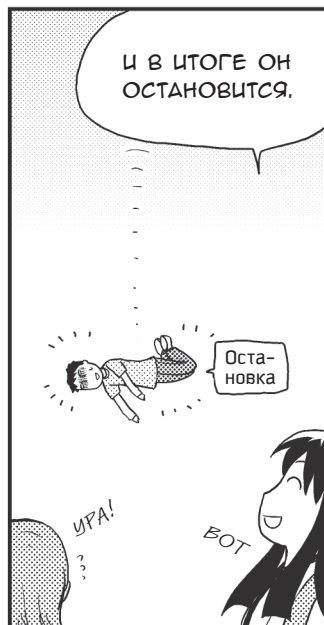
ПОНЯТНО.

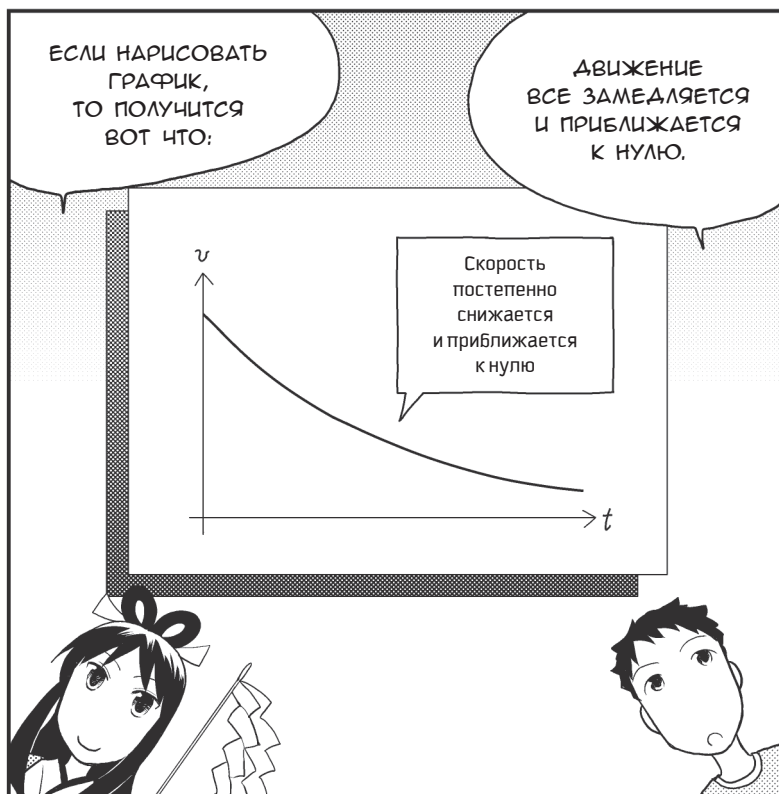
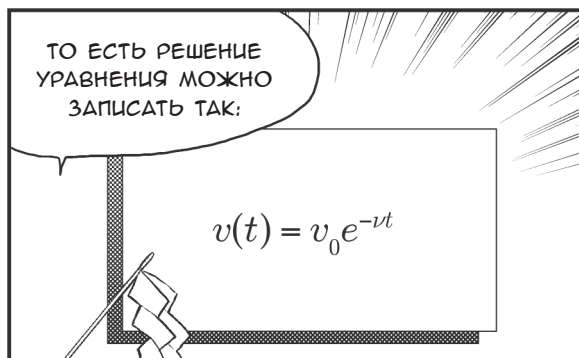
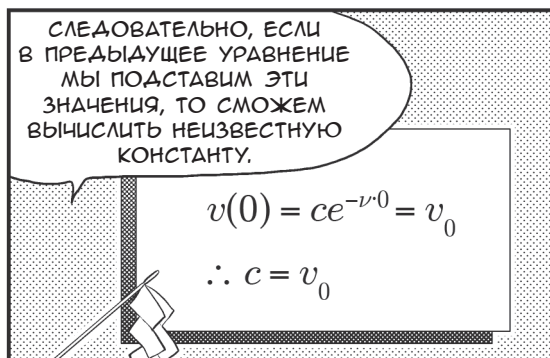
ДРУГИМИ СЛОВАМИ,
ОН ПОКАЗЫВАЕТ,
ЧТО ТЕЛО ДВИЖЕТСЯ
ВНИЗ С УСКОРЕНИЕМ.











КСТАТИ, ЕСЛИ НАЧАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ v_0 РАВНА НУЛЮ,

ТО ИЗ РАВЕНСТВА $v(t) = v_0 e^{-\nu t}$ ПОЛУЧИМ, ЧТО $v(t) = 0$.

► Повтор



Состояние покоя

ЭТО ПОКАЗЫВАЕТ ОЧЕВИДНОЕ, ЧТО ОБЪЕКТ ВСЕ ВРЕМЯ СТОИТ НА МЕСТЕ.

ЭТО ПОНЯТНО...

3. РЕШЕНИЕ

Реальный мир

Мир математики

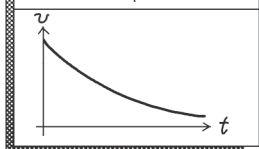
Явление



Падение мелких капель воды, подобных частицам воды в облаке

Применение

Описание явления, когда действует только вязкое сопротивление



Моделирование

Модель движения при наличии вязкого сопротивления

$$\frac{dv}{dt} = g - \nu v$$

Модель ситуации, когда действует только вязкое сопротивление

$$\frac{dv}{dt} = -\nu v$$

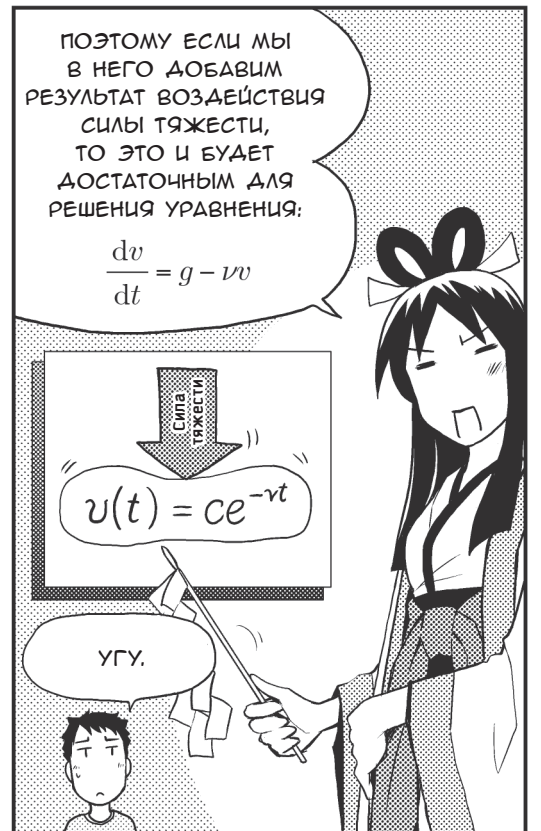
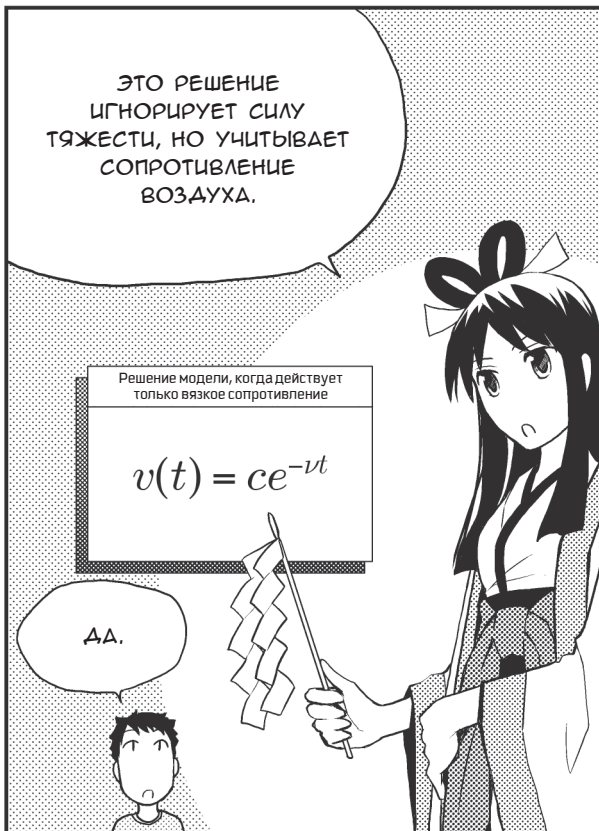
Решение модели, когда действует только вязкое сопротивление

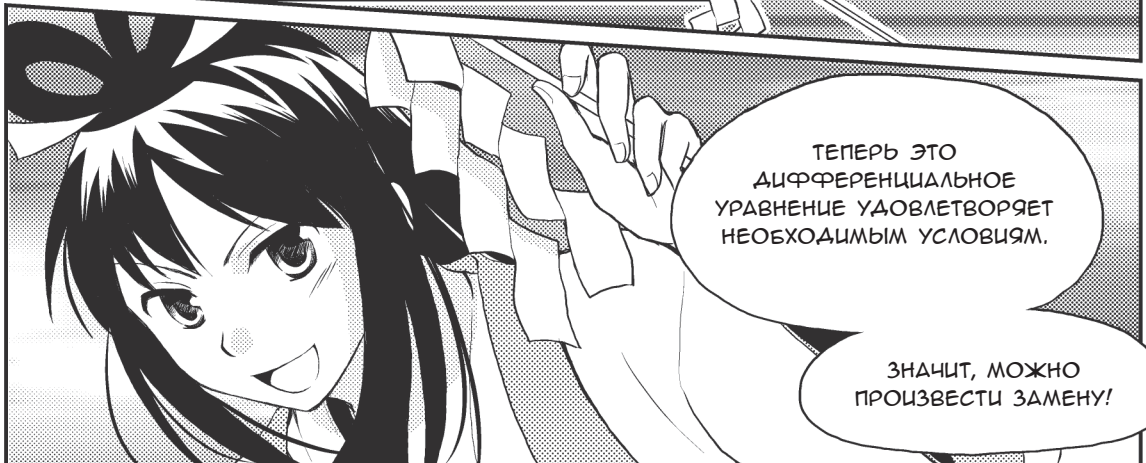
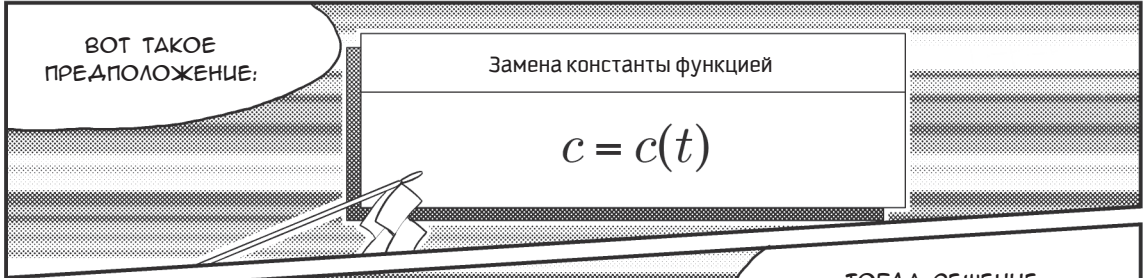
$$v(t) = ce^{-\nu t}$$

Интерпретация

Вычисления

ИТАК, ПРИ ОТСУТСТВИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ МЫ СМОГЛИ РЕШИТЬ ЗАДАЧУ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ.







■ Итоговые вычисления

$$\frac{dv}{dt} = g - \nu v$$

Дифференциальное уравнение, которое мы хотели решить изначально.

$$\frac{d(c(t)e^{-\nu t})}{dt} = g - \nu(c(t)e^{-\nu t})$$

Подставляем замену $v(t) = c(t)e^{-\nu t}$.

Продифференцируем левую часть...

$$\frac{dc(t)}{dt}e^{-\nu t} + c(t)\frac{de^{-\nu t}}{dt} = \frac{dc(t)}{dt}e^{-\nu t} + c(t)(-\nu e^{-\nu t})$$

Возвращаемся:

$$\frac{dc(t)}{dt}e^{-\nu t} - \nu c(t)e^{-\nu t} = g - \nu c(t)e^{-\nu t}$$

Сокращаем на $\nu c(t)e^{-\nu t}$ в обеих частях уравнения.

$$\frac{dc(t)}{dt}e^{-\nu t} = g$$

Переносим $e^{-\nu t}$ и интегрируем.

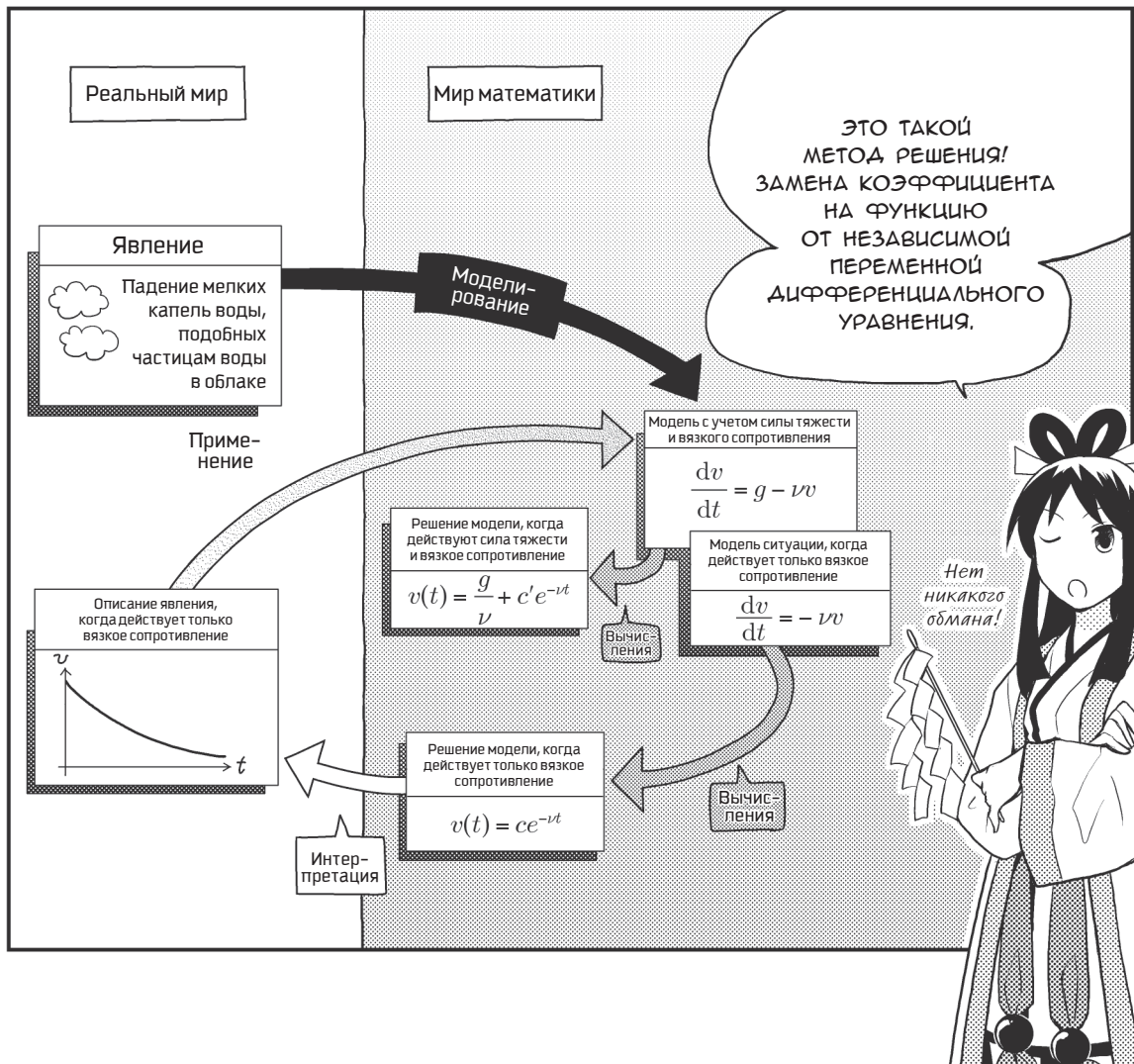
$$c(t) = g \int e^{\nu t} dt$$

$$= g \frac{e^{\nu t}}{\nu} = c'$$

Подставляем замену $v(t) = c(t)e^{-\nu t}$.

$$\begin{aligned} v(t) &= \left(g \frac{e^{\nu t}}{\nu} + c' \right) e^{-\nu t} \\ &= \frac{g}{\nu} + c' e^{-\nu t} \end{aligned}$$

Решение для ситуации, когда действуют сила тяжести и вязкое сопротивление.



4. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

$$v(t) = \frac{g}{\nu} + c'e^{-\nu t}$$

ИТАК, ИССЛЕДУЕМ СОСТОЯНИЕ ПАДАЮЩЕЙ КАПЛИ, РАВНОЙ ЧАСТИЦЕ ВОДЫ В ОБЛАКЕ.

ЗА НАЧАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ВОЗЬМЕМ $v(0) = 0$ В МОМЕНТ ВРЕМЕНИ $t = 0$.

ХМ...

ВОТ ТАК БУДЕТ, ДА?

$$v(t) = \frac{g}{\nu} + c'e^{-\nu t}$$

$$v(0) = 0 = \frac{g}{\nu} + c'e^{-\nu \cdot 0}$$

$$c' = -\frac{g}{\nu}$$

Решение при условии, что начальная скорость равна нулю

$$v(t) = \frac{g}{\nu} (1 - e^{-\nu t})$$

Подставляем $v(0) = 0$

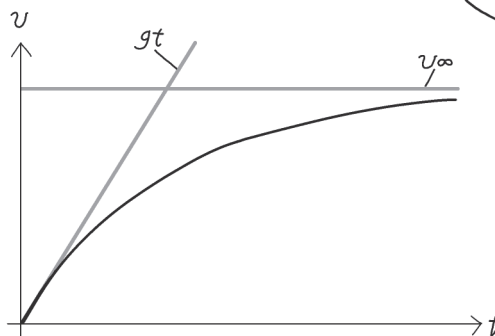
Выводим значение константы

ЗДОРОВО!

АГА!

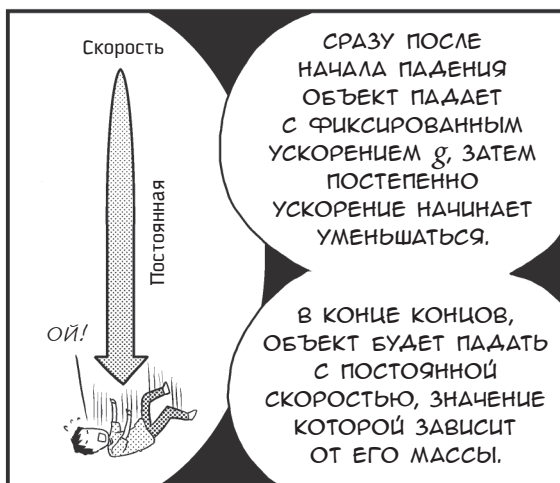
ТЕПЕРЬ ПОПРОБУЕМ НАРИСОВАТЬ ГРАФИК!

Изменение скорости относительно времени для объекта, падающего в воздухе, если его начальная скорость равна нулю



С ТЕЧЕНИЕМ ВРЕМЕНИ ЗНАЧЕНИЕ СКОРОСТИ ПРИБЛИЖАЕТСЯ К ОПРЕДЕЛЕННОМУ ЧИСЛУ, ДА?

ИМЕННО!





Так же, как в случае, когда мы предполагали отсутствие силы тяжести, попробуем рассмотреть ситуацию, когда начальная скорость равна не нулю, а v_0 .

$$v(t) = \frac{g}{\nu} + c'e^{-\nu t}$$

$$v(0) = v_0 = \frac{g}{\nu} + c'e^{-\nu \cdot 0}$$

$$c' = v_0 - \frac{g}{\nu}$$

Подставим $v(0) = v_0$.

Выводим константу.

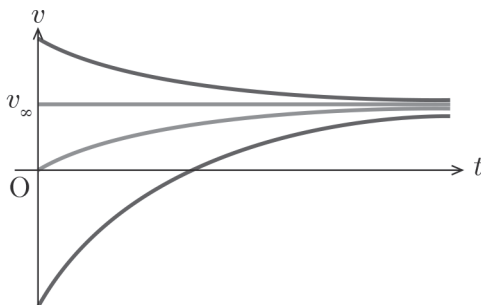
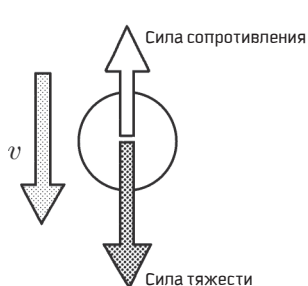
$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{g}{\nu} + \left(v_0 - \frac{g}{\nu}\right)e^{-\nu t} \\ &= \frac{g}{\nu}(1 - e^{-\nu t}) + v_0 e^{-\nu t} \end{aligned}$$

Решение для случая, когда начальная скорость равна v_0 .



Если посмотреть на график, то видно, что когда начальная скорость v_0 положительна, то изменение скорости изначально направлено вниз, а если отрицательна, то изменение скорости изначально направлено вверх, но...

...каким бы оно не было, в итоге значение скорости будет стремиться к конечной скорости $mg/6\pi\eta r$!

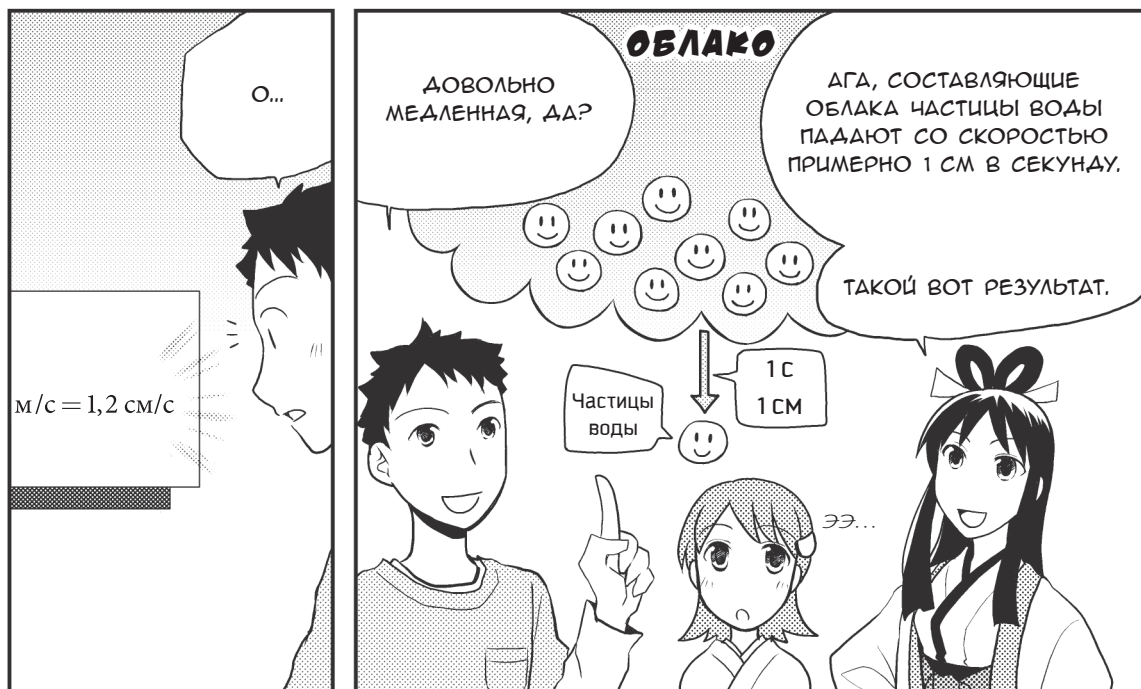


Изменение скорости падающего в воздухе объекта относительно времени при начальной скорости v_0



ЧАСТИЦА ВОДЫ В ОБЛАКЕ,
О КОТОРОЙ МЫ ГОВОРИМ,
ИМЕЕТ РАДИУС ОКОЛО
0,01 ММ...

...ПОЭТОМУ МЫ МОЖЕМ РАССЧИТАТЬ
ДЛЯ НЕЕ КОНЕЧНУЮ СКОРОСТЬ,
УЧИТЫВАЯ, ЧТО ПЛОТНОСТЬ ВОДЫ
СОСТАВЛЯЕТ $1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

$$v_{\infty} = \frac{1 \times 10^3 \text{ кг/м}^3 \times \frac{4}{3} \pi (10 \text{ мкм})^3 \times 9,80 \text{ м/с}^2}{6\pi \times 1,8 \times 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с} \times 10 \text{ мкм}} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м/с} = 1,2 \text{ см/с}$$




$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{4} \pi \rho r^2 v^2$$

$$mg = \frac{1}{4} \pi \rho r^2 v_\infty^2$$

$$v_\infty = \sqrt{\frac{4mg}{\pi \rho r^2}}$$

Уравнение движения в случае, если действует только инерционное сопротивление. Выразим конечную скорость, учитывая, что сила тяжести и сила сопротивления сбалансированы, а значит, ускорение (dv/dt) равно нулю...

Конечная скорость в случае, если действует только инерционное сопротивление.

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= f - \frac{g}{v_\infty^2} v^2 \\ &= \frac{g}{v_\infty^2} (v_\infty^2 - v^2) \\ &= \frac{g}{v_\infty^2} (v_\infty - v)(v_\infty + v) \end{aligned}$$

В обеих частях возьмем обратные значения.

$$\frac{dt}{dv} = \frac{v_\infty^2}{g} \frac{1}{(v_\infty - v)(v_\infty + v)}$$

$$\frac{dt}{dv} = \frac{v_\infty}{2g} \left(\frac{1}{v_\infty - v} + \frac{1}{v_\infty + v} \right)$$

$$\int dt = \int \frac{v_\infty}{2g} \left(\frac{1}{v_\infty - v} + \frac{1}{v_\infty + v} \right) dv$$

В правой части используем разложение дробей на части.

Разделив переменные, интегрируем.

$$t = \frac{v_\infty}{2g} \left(-\ln|v_\infty - v| + \ln|v_\infty + v| \right) + C$$

$$= \frac{v_\infty}{2g} \ln \left| \frac{v_\infty + v}{v_\infty - v} \right| + C$$

Небольшая хитрость



Метод разделения переменных, да?!





Если изначально объект находился в состоянии покоя, то в момент времени $t = 0$ получаем $v(0) = 0$, а интегральная константа будет такой:

$$0 = \frac{v_{\infty}}{2g} \ln \left| \frac{v_{\infty} + 0}{v_{\infty} - 0} \right| + C$$

$$\therefore C = 0$$

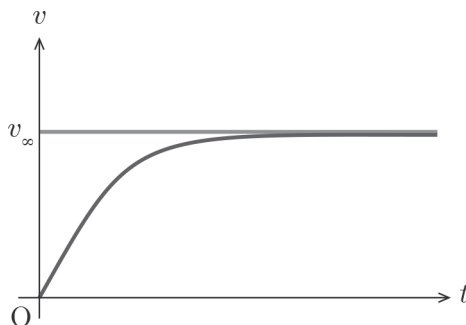


Скорость объекта v не может превысить конечную скорость, поэтому можно убрать знак модуля. В результате скорость будет такой:

$$t = \frac{v_{\infty}}{2g} \ln \frac{v_{\infty} + v}{v_{\infty} - v}$$

$$\therefore v = \frac{1 - e^{-\frac{2g}{v_{\infty}}t}}{1 + e^{-\frac{2g}{v_{\infty}}t}} \cdot v_{\infty} = v_{\infty} \tanh \frac{gt}{v_{\infty}}$$

Решение для случая, когда действует только инерционное сопротивление.



Изменение скорости падающего в воздухе объекта в зависимости от времени при условии нулевой начальной скорости и с учетом инерционного сопротивления

Хотя и похоже на ситуацию с вязким сопротивлением, но тут изгиб кривой более резкий, да?



В СЛУЧАЕ
С КАПЛЕЙ ДОЖДА
КОНЕЧНАЯ СКОРОСТЬ
БУДЕТ ВОТ ТАКОУ:

- Радиус: 1000 мкм (= 1 мм)
- Плотность атмосферы $\rho = 1,2 \text{ кг/м}^3$
- Плотность воды $\rho' = 1 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{4 \times \frac{4}{3} \pi \times 1 \times 10^3 \text{ кг/м}^3 \times (1 \text{ мм})^3 \times 9,80 \text{ м/с}^2}{\pi \times 1,2 \text{ кг/м}^3 \times (1 \text{ мм})^2}} = 6,6 \text{ м/с}$$

6,6 МЕТРА
В СЕКУНДУ!

ВЫСТРО КАК!!

ПО СРАВНЕНИЮ
С ЧАСТИЦЕЙ ВОДЫ
В ОБЛАКЕ, ЭТА
СКОРОСТЬ ВЫГЛЯДИТ
ВНУШИТЕЛЬНО,

НО, НАПРИМЕР, ЧТОБЫ
УПАСТЬ С ВЫСОТЫ 400 М,
КАПЛЕ ДОЖДА ПОТРЕБУЕТСЯ
БОЛЬШЕ МИНУТЫ.

1 с

6,6 м



Капля
дожда

ВОТ КАК..

НУ ТОГДА,
ЕСЛИ ПОДУМАТЬ,
ДЕЙСТВИТЕЛЬНО,
НЕ ТАКАЯ УЖ
БОЛЬШАЯ
СКОРОСТЬ.

ПОЭТОМУ,
ДАЖЕ ЕСЛИ
МЫ ПОПАДАЕМ
ПОД ДОЖДЬ,
ЭТО НЕ ОПАСНО.

Было бы неприятно,
если бы от дождя мы
получили травмы

Для уж,
приятного
мало

5. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

Вернемся к тому, как мы получили решение для дифференциального уравнения, описывающего движение падающего в воздухе объекта с учетом воздействия вязкого сопротивления. Исходное дифференциальное уравнение, которое нас интересует:

$$\frac{dv}{dt} = g - \nu v, \quad \leftarrow \text{Исходное дифференциальное уравнение} \quad (4.1)$$

изначально нельзя решить с помощью метода разделения переменных, поэтому сначала мы отбросили первый показатель в правой части g (предполагаем, что его изначально не было), после чего уравнение приобрело вид, подходящий для метода разделения переменных:

$$\frac{dv}{dt} = -\nu v \quad (4.2)$$

(дифференциальное уравнение, к которому можно применить разделение переменных).

Затем мы его решили. Полученное решение

$$v(t) = ce^{-\nu t} \quad \leftarrow \text{Общее решение} \quad (4.3)$$

содержит произвольную постоянную c (общим решением называется множество всех решений дифференциального уравнения, и для уравнения n -го порядка оно содержит n произвольных постоянных). В качестве начального состояния мы взяли момент времени $t = 0$, в который $v(0) = v_0$, и получили частное решение:

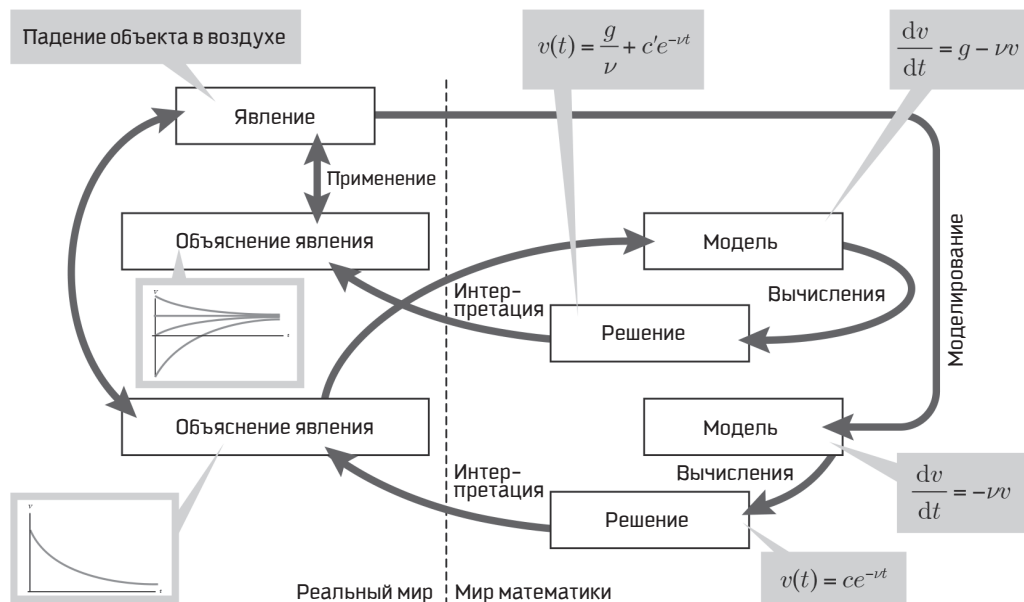
$$v(t) = v_0 e^{-\nu t}. \quad \leftarrow \text{Частное решение} \quad (4.4)$$

Когда в общем решении мы заменяем произвольную постоянную на конкретное значение, то получаем частное решение. Если бы нашей задачей было решить уравнение (4.2), то на этом бы мы и закончили. Но мы хотим решить дифференциальное уравнение (4.1), а для этого нам нужно скорректировать полученное методом разделения переменных решение. Для этого в общем решении (4.3) заменим произвольную постоянную c на функцию от времени $c(t)$:

$$v(t) = c(t)e^{-\nu t}. \quad (4.5)$$

Подставив эту замену в исходное дифференциальное уравнение (4.1), получаем искомого решение:

$$v(t) = \frac{g}{\nu} + c'e^{-\nu t}. \quad (4.6)$$



Пройдя процесс моделирования, дважды получили искомое решение

Модель движения падающего в воздухе объекта с учетом вязкого сопротивления

Мы получили решение искомого уравнения, но, возможно, существуют сомнения, действительно ли оно подходящее? Попробуем его обобщить¹.

Если записать наше исходное дифференциальное уравнение (4.1) в общем виде, то получим:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \quad \leftarrow \text{Неоднородное дифференциальное уравнение} \quad (4.7)$$

Хотя в нашем уравнении движения падающего в воздухе объекта с учетом вязкого сопротивления (4.1) вместо $p(x)$ и $q(x)$ были константы, но в общем случае их можно представить как функции от x . Уравнение же движения в случае отсутствия силы тяжести (4.2) в общем случае будет выглядеть так:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0. \quad \leftarrow \text{Однородное дифференциальное уравнение} \quad (4.8)$$

Оба уравнения линейные, но различаются наличием или отсутствием функции $q(x)$. В уравнении (4.8), которое не содержит $q(x)$, каждое слагаемое содержит или y , или dy/dx , а значит, это уравнение является однородным дифференциальным уравнением. В уравнении (4.7) есть функция $q(x)$, не связанная с переменной y , а значит, это неоднородное дифференциальное уравнение.

¹ Это одно из преимуществ математики.

Решаем однородное дифференциальное уравнение (4.8) методом разделения переменных и, обозначив за C интегральную постоянную, получаем:

$$y = e^{-\int p(x)dx+C} = e^C e^{-\int p(x)dx}. \quad \leftarrow \text{Общее решение однородного уравнения} \quad (4.9)$$

Так как решение содержит произвольную постоянную, это общее решение. Заменяем содержащуюся в общем решении интегральную константу C на функцию от x – $C(x)$:

$$y = e^{C(x)} e^{-\int p(x)dx}. \quad \leftarrow \text{Замена в общем решении однородного уравнения постоянной на функцию}$$

Чтобы упростить вид полученного уравнения, заменим $e^{C(x)}$ на $c(x)$. Получаем такое допустимое решение:

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx}. \quad \leftarrow \text{Допустимое решение неоднородного дифференциального уравнения} \quad (4.10)$$

Подставив полученное решение в неоднородное уравнение (4.7), выведем $c(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{dc(x)e^{-\int p(x)dx}}{dx} + p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} &= q(x); \\ \frac{dc(x)}{dx} e^{-\int p(x)dx} + c(x) \frac{de^{-\int p(x)dx}}{dx} + p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} &= q(x); \\ \frac{dc(x)}{dx} e^{-\int p(x)dx} + c(x)(-p(x))e^{-\int p(x)dx} + p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} &= q(x); \\ \frac{dc(x)}{dx} e^{-\int p(x)dx} &= q(x); \\ \frac{dc(x)}{dx} &= q(x)e^{\int p(x)dx}. \end{aligned}$$

Получается, что функция $c(x)$ равна:

$$c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + c'. \quad \leftarrow \text{Допустимая функция}$$

Получив значение допустимой функции $c(x)$, подставим его в решение неоднородного уравнения (4.10):

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + c' \right) e^{-\int p(x)dx} \quad \leftarrow \text{Общее решение неоднородного уравнения} \quad (4.11)$$

и получаем общее решение неоднородного уравнения.

Теперь раскроем скобки в полученном общем решении неоднородного уравнения (4.11):

$$y = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + c' e^{-\int p(x)dx}.$$

А значит, учитывая, что $c' = e^C$, получается, что общее решение однородного уравнения (4.9)

$$c' e^{-\int p(x)dx} \quad \leftarrow \text{Общее решение однородного уравнения}$$

и частное решение неоднородного уравнения

$$e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx \quad \leftarrow \text{Частное решение неоднородного уравнения}$$

в сумме дают общее решение неоднородного уравнения.

$$\boxed{\text{Общее решение неоднородного уравнения}} = \boxed{\text{Общее решение однородного уравнения}} + \boxed{\text{Частное решение неоднородного уравнения}}$$

Решение неоднородного уравнения

Давайте проверим. Если решением однородного уравнения (4.8) является $y = u(x)$, тогда получим вот такое соотношение:

$$\frac{du(x)}{dx} + p(x)u(x) = 0.$$

Если при этом решением неоднородного уравнения (4.7) будет $y = v(x)$, то получим вот такое соотношение:

$$\frac{dv(x)}{dx} + p(x)v(x) = q(x).$$

Если же теперь сложим полученные результаты (4.12) и (4.13), то получим вот такое соотношение:

$$\frac{d(u(x) + v(x))}{dx} + p(x)(u(x) + v(x)) = q(x).$$

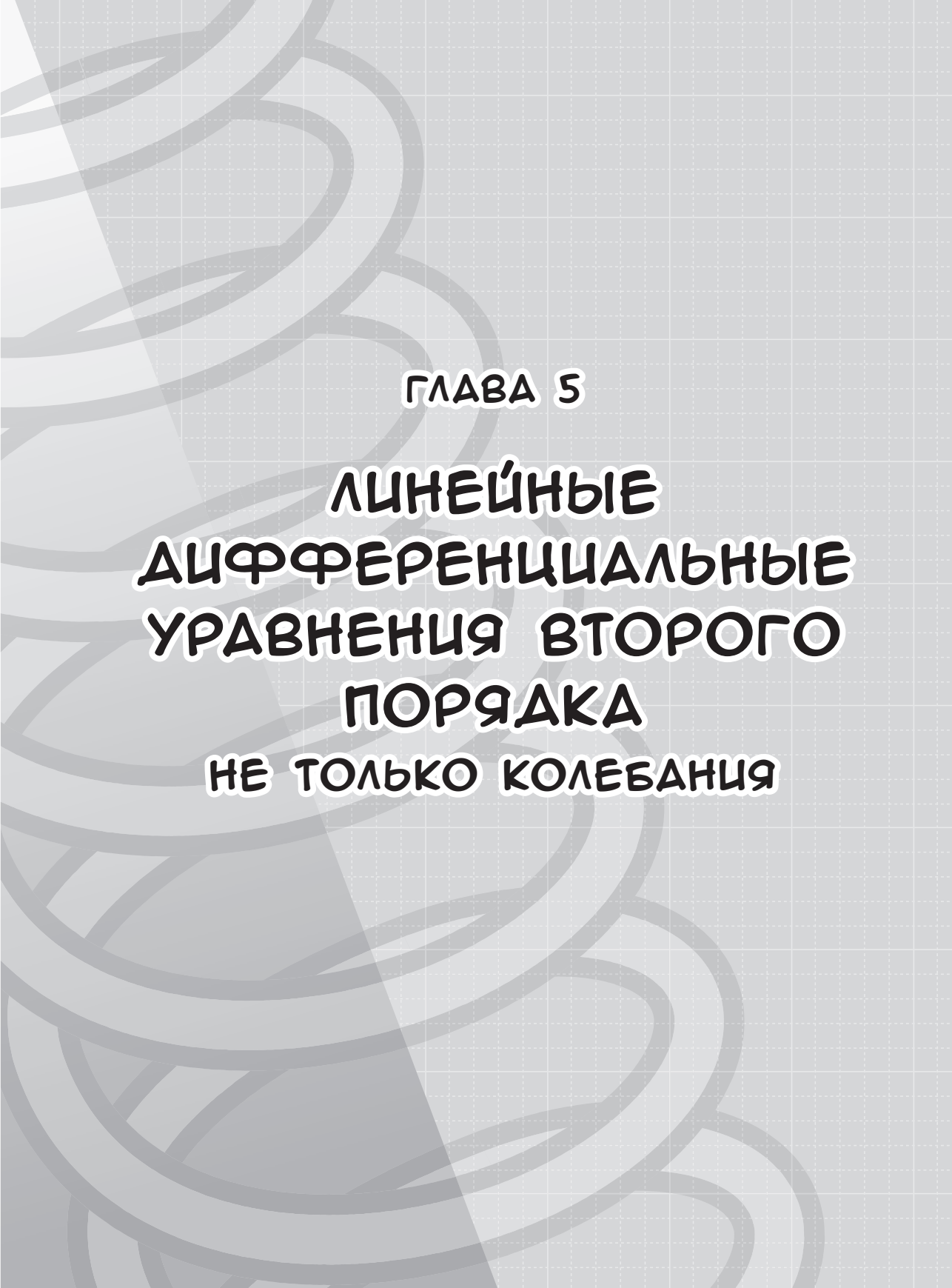
А следовательно, $y = u(x) + v(x)$ также является решением неоднородного уравнения (4.7). Значит, мы смогли таким способом получить решение неоднородного дифференциального уравнения.

Метод решения неоднородных дифференциальных уравнений называется **методом вариации произвольных постоянных**. Называется он так потому, что для решения неоднородного уравнения мы производим замену произвольных постоянных на неизвестные функции в общем решении однородного уравнения.



Решение неоднородных уравнений

Метод вариации произвольных постоянных – это способ решения неоднородных дифференциальных уравнений, в котором мы сначала решаем легкодоступную для решения часть уравнения (однородное уравнение), а затем корректируем полученное решение, чтобы оно удовлетворяло условиям неоднородного дифференциального уравнения. То есть метод основан на том, что мы сначала решаем то, что можем легко решить, а детали учитываем позднее. И это великолепная идея! Так же и на примере падающего в воздухе объекта, мы сначала находим решение для той части, когда движение объекта меняется по экспоненте, а уже потом приходим к общему конечному решению.



ГЛАВА 5

**ЛИНЕЙНЫЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО
ПОРЯДКА
НЕ ТОЛЬКО КОЛЕБАНИЯ**

1. ЯВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Э...
ЭТО ЕЩЕ ЧТО?!

ШУМ
ГЛАМ

КАКОЙ
ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ
ХРАМ!

О ЧЕМ
НЕ ПОМОЛИШЬСЯ -
ВСЕ СБЫВАЕТСЯ!

И жена
вернулась!!

АХ...
ЭТО ОН...

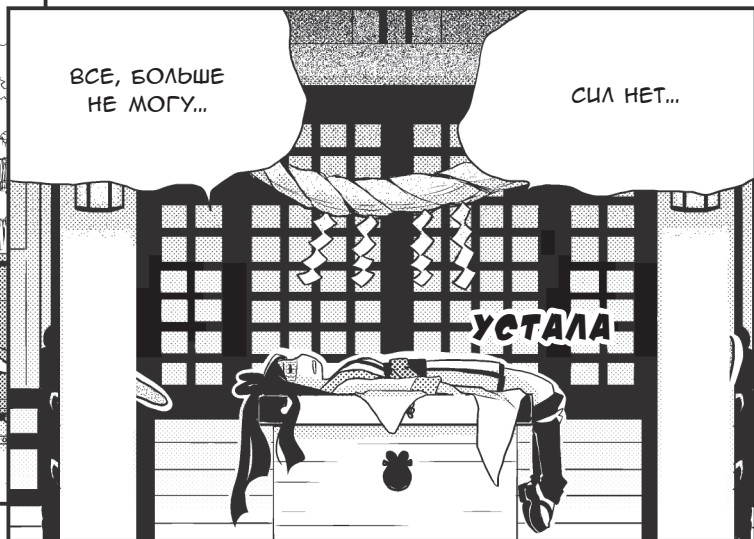
Спасибо, боги!
Банзай! Банзай!

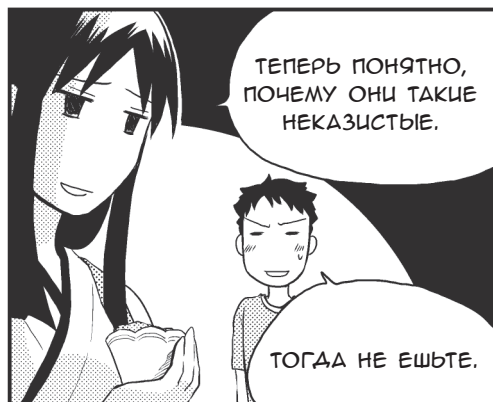
Только этого
не хватало...

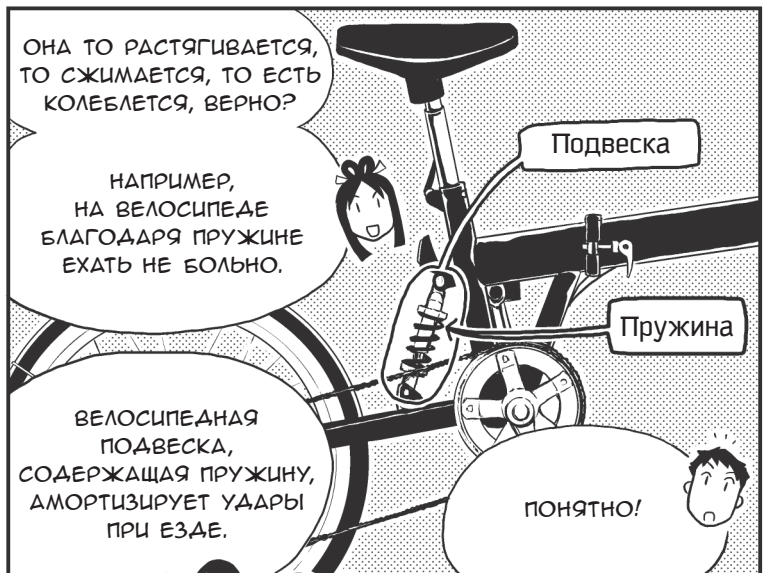
ГОСПОЖА
БОГИНЯ!!

ОЙ!





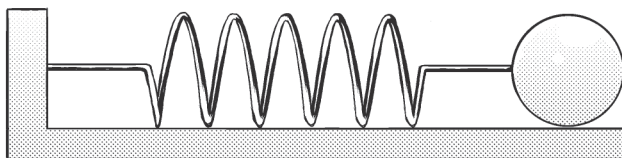




2. КОЛЕБАНИЯ. МОДЕЛЬ 1

ИТАК,
ЧТОБЫ ЛЕГЧЕ БЫЛО
ИЗМЕРИТЬ ДЛИНУ ПРУЖИНЫ,
КОТОРАЯ ТО СЖИМАЕТСЯ,
ТО РАСТЯГИВАЕТСЯ...

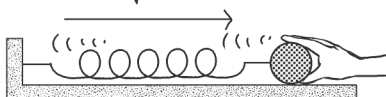
...ИСПОЛЬЗУЕМ ТАКОЕ
ПРИСПОСОБЛЕНИЕ.



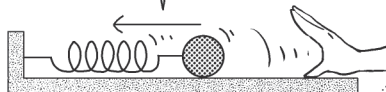
А ЧТО ЭТО?

ЕСЛИ СНАЧАЛА ОТТЯНУТЬ ГРУЗ,
А ПОТОМ ОТПУСТИТЬ, ПРУЖИНА
НАЧНЕТ КОЛЕБАТЬСЯ.

Оттягиваем



Отпускаем



А ПО ДВИЖЕНИЮ ГРУЗА
МОЖНО БУДЕТ ЛЕГКО
ПОНЯТЬ СТЕПЕНЬ
РАСТЯЖЕНИЯ ПРУЖИНЫ.

О-О-О...

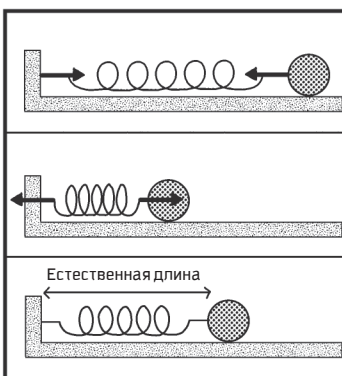
ДЛИНА ПРУЖИНЫ В ЕСТЕСТВЕННОМ
ПОЛОЖЕНИИ, КОГДА К НЕЙ
НЕ ПРИЛОЖЕНО НИКАКИХ СИЛ,
НАЗЫВАЕТСЯ **ЕСТЕСТВЕННОЙ**
ДЛИНОЙ.

Естественная длина

Пружина

Груз

Ровная
горизонтальная
поверхность



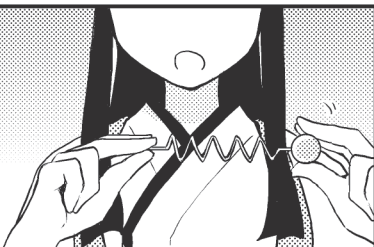
ЕСЛИ СИЛЬНО
ОТТЯНУТЬ ГРУЗ, ТО
ПРУЖИНА РАСТЯНЕТСЯ,

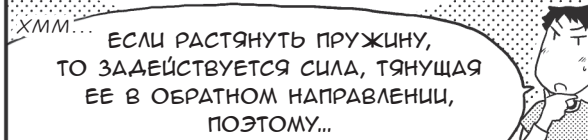
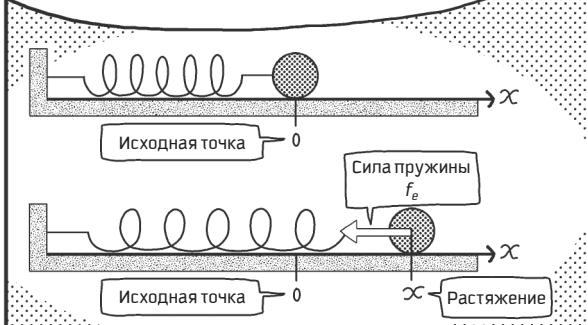
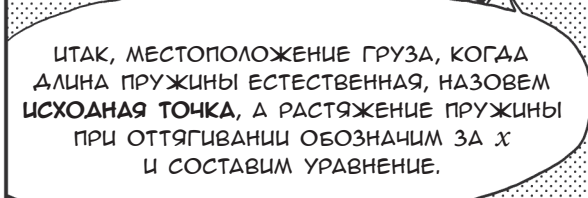
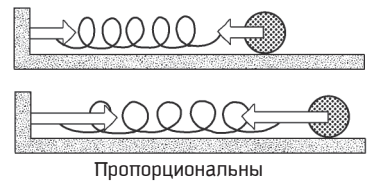
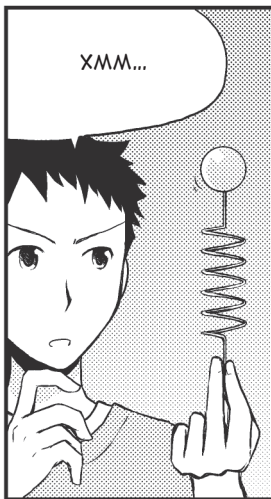
ПОСЛЕ ЧЕГО
НАЧНЕТ СЖИМАТЬСЯ
И РАСТЯГИВАТЬСЯ
С ЗАМЕДЛЕНИЕМ,
ПОКА НЕ ВЕРНЕТСЯ
К ЕСТЕСТВЕННОЙ
ДЛИНЕ.

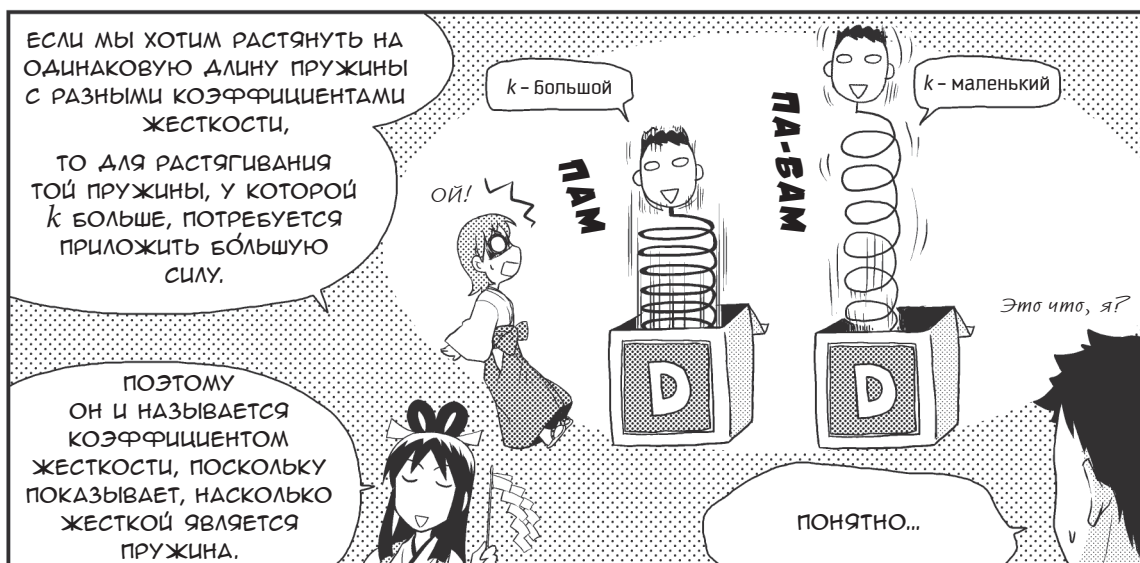
АГА

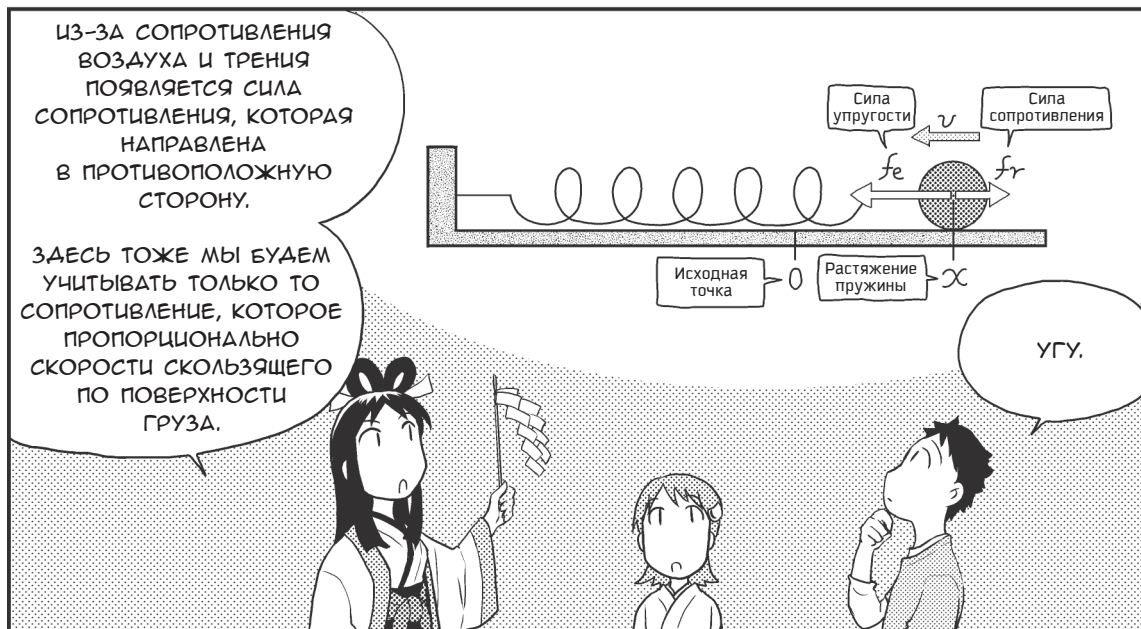
ТЕПЕРЬ ДАВАЙ
ПОДУМАЕМ,

КАКАЯ СВЯЗЬ
МЕЖАУ СИЛОЙ,
ОТТЯГИВАЮЩЕЙ
ПРУЖИНУ, И ЕЕ
РАСТЯЖЕНИЕМ?





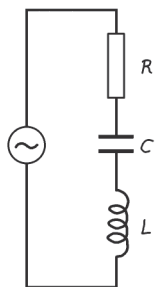






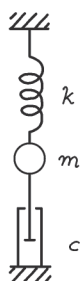
КСТАТИ ГОВОРЯ, КОЛЕБАНИЯ ТОКА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ТОЖЕ МОЖНО ОПИСАТЬ ТАКОЙ ЖЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛЮ.

Колебания тока



$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = V(t)$$

Колебания груза



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

В ЭТОМ СЛУЧАЕ ИНДУКТИВНОСТЬ (L), ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ (C) И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ (R) В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

СООТВЕТСТВУЮТ МЕХАНИЧЕСКИМ ПОНЯТИЯМ ИНЕРЦИИ, УПРУГОСТИ И СОПРОТИВЛЕНИЯ.

ЗНАЧИТ, ЭТОЙ МОДЕЛЮ МОЖНО ОПИСАТЬ НЕ ТОЛЬКО МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ, НО И РАЗНЫЕ ДРУГИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЯВЛЕНИЯ.

ИТАК,
ПОПРОБУЕМ СОСТАВИТЬ
УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ
ДЛЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ
СИСТЕМЫ.

ЕСЛИ ОБОЗНАЧИМ
ЗА m МАССУ ГРУЗА,
ТО ВОТ ЧТО ПОЛУЧИТСЯ:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -c \frac{dx}{dt} - kx + F(t)$$

Масса груза

Мера сопротивления воздуха

Сила сопротивления

Сила упругости

Жесткость пружины

Внешняя сила



$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

ДЛЯ БОЛЬШЕЙ НАГЛЯДНОСТИ
ЭТО УРАВНЕНИЕ ЧАСТО
ЗАПИСЫВАЮТ ВОТ ТАК:



3. КОЛЕБАНИЯ. МОДЕЛЬ 2. ПРОСТЫЕ КОЛЕБАНИЯ

ЭТО УРАВНЕНИЕ...

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

ХММ...

С ЧЕГО БЫ НАЧАТЬ
ЕГО РЕШЕНИЕ?..

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

Трудновато...

Такое сложное...

В ТАКИХ СИТУАЦИЯХ
ПРЕЖДЕ ВСЕГО НУЖНО
МАКСИМАЛЬНО
УПРОСТИТЬ ЗАДАЧУ.

К ПРИМЕРУ,
В ЭТОМ СЛУЧАЕ...

$$\frac{x}{t^3} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

...ПОПРОБУЕМ
ПОСМОТРЕТЬ, ЧТО
БУДЕТ, ЕСЛИ УБРАТЬ
СИЛУ СОПРОТИВЛЕНИЯ
И ВНЕШНЮЮ СИЛУ.

Сила
сопротивления

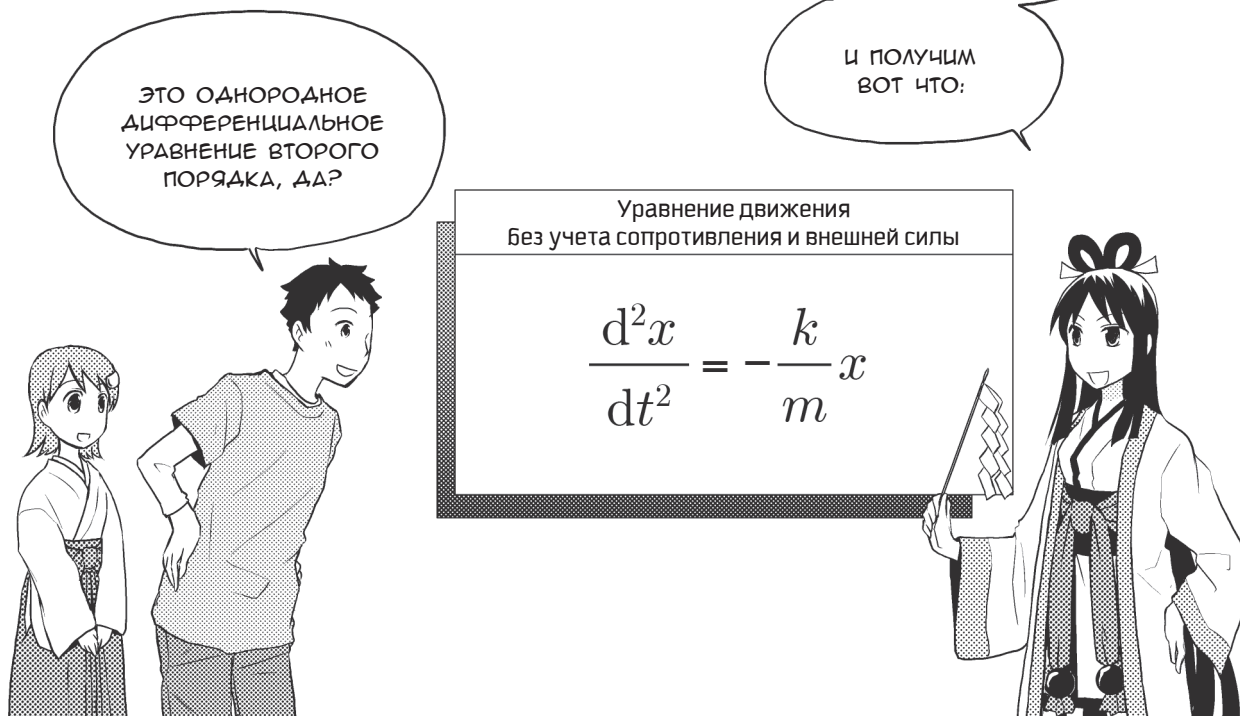
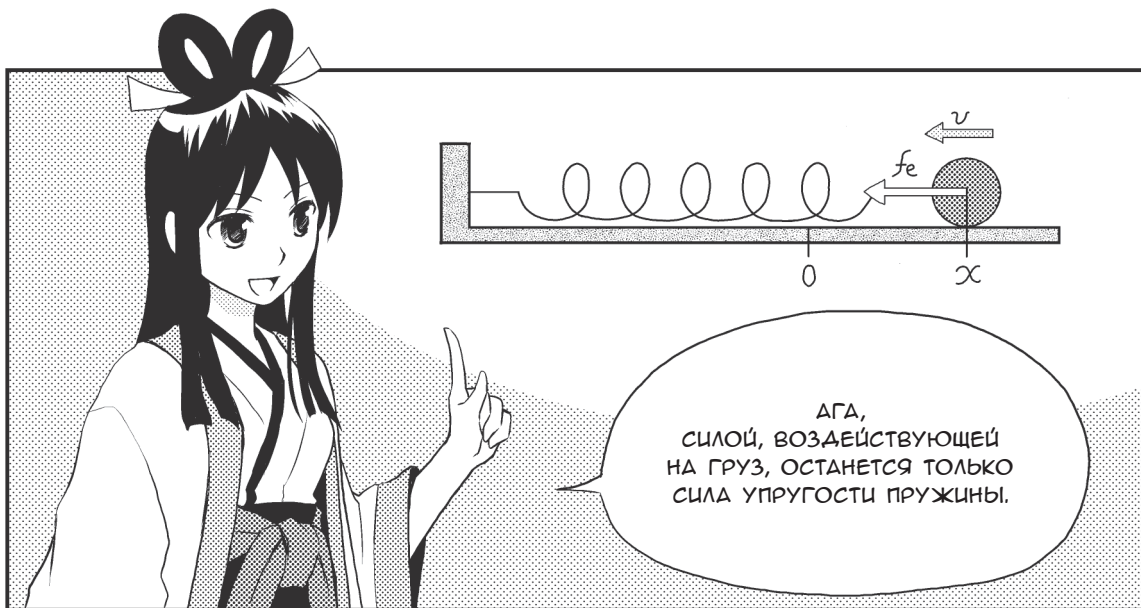
Внешняя
сила

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \cancel{c \frac{dx}{dt}} + \cancel{kx} = \cancel{F(t)}$$

ТО ЕСТЬ УЧИТЫВАЕМ
ТОЛЬКО ИНЕРЦИЮ
И УПРУГОСТЬ, ДА?

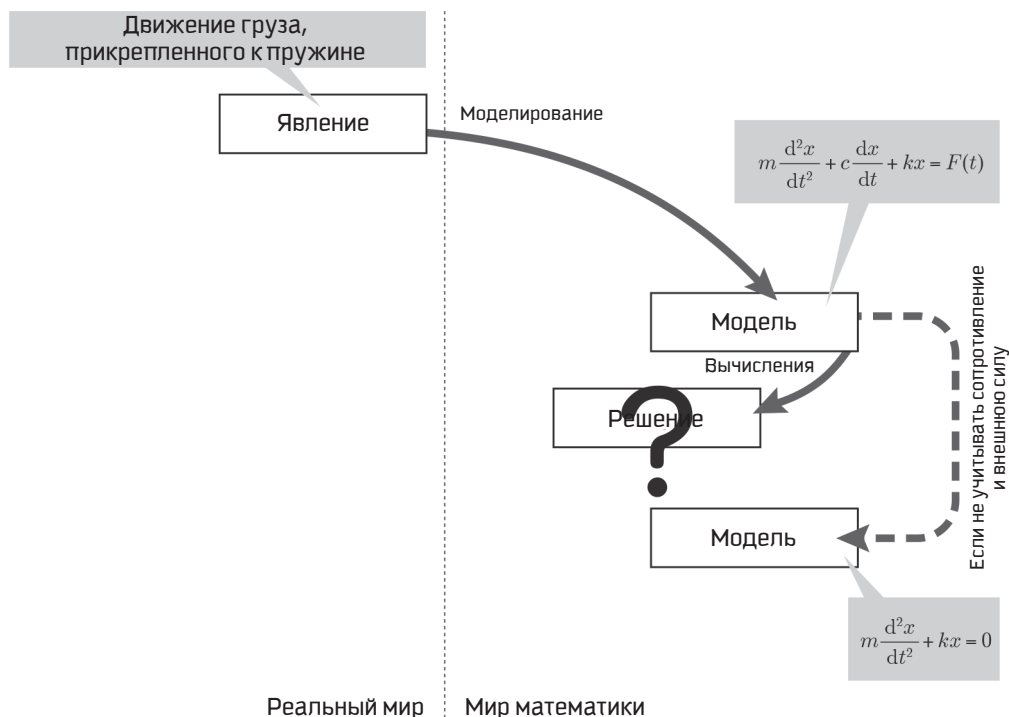
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

Понятно





Итак, что мы сейчас сделали? Полученная модель получилась такой сложной, что не понятно, как с ней работать. Поэтому мы упростили явление, опустившись на уровень ниже, и получили другую модель.



Моделирование движения груза, прикрепленного к пружине, без учета сопротивления и внешней силы



Понятно.



Теперь найдем общее решение для ситуации, когда отсутствуют сила сопротивления и внешняя сила. Посмотри внимательно на это дифференциальное уравнение.



Еще раз?



Если посмотреть действительно внимательно, то заметишь, что после двойного дифференцирования x по t мы на выходе получаем снова $-x$, хотя и с добавлением k/m^1 .



После двойного дифференцирования возвращается к исходному значению... Где-то такое уже было...

¹ При быстром взгляде этого не заметить.



На стр. 53 мы дифференцировали функцию синуса:

$$\frac{d}{dt} \sin t = \cos t.$$

Если полученную функцию косинуса продифференцировать снова, то получим:

$$\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t.$$

Что можно записать вот так:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sin t = \frac{d}{dt} \cos t = -\sin t.$$

То есть после двойного дифференцирования мы вернулись к первоначальной функции. Если умело использовать это свойство тригонометрических функций, то кажется, можно получить решение и нашего уравнения. Однако в нашем уравнении $d^2x/dt^2 = -(k/m)x$ есть добавочный элемент k/m , с которым надо что-то сделать. Тут уместно вспомнить одно из основных свойств производных. Если ω – это константа, то:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sin \omega t = \omega \frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega^2 \sin \omega t.$$

Теперь, кажется, что-то может получиться. Если обозначить:

$$\frac{k}{m} = \omega^2, \tag{5.1}$$

то получается, что:

$$x(t) = \sin \omega t. \tag{5.2}$$

Это является решением уравнения $d^2x/dt^2 = -(k/m)x$. Вот и хорошо!

Но подождите! Это не единственное решение, разве не так? Например, если решение (5.2) умножить на константу:

$$x(t) = A \sin \omega t, \tag{5.3}$$

то это тоже будет являться решением уравнения $d^2x/dt^2 = -(k/m)x$. Потому что, если подставить это решение в уравнение:

$$\frac{d^2}{dt^2} A \sin \omega t = -\omega^2 A \sin \omega t,$$

мы можем в этом убедиться. Кроме того, вот формула производной косинуса:

$$\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t.$$

И если теперь еще раз продифференцировать полученный в результате синус:

$$\frac{d}{dt} \sin t = \cos t,$$

получим снова косинус. Это можно переписать как:

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos t = -\frac{d}{dt} \sin t = -\cos t.$$

И если B – это константа, то получим, что:

$$x(t) = B \cos \omega t, \tag{5.4}$$

и это тоже будет являться решением уравнения $d^2x/dt^2 = -(k/m)x$.

На самом деле общим решением уравнения является линейная комбинация² решения (5.3) и решения (5.4):

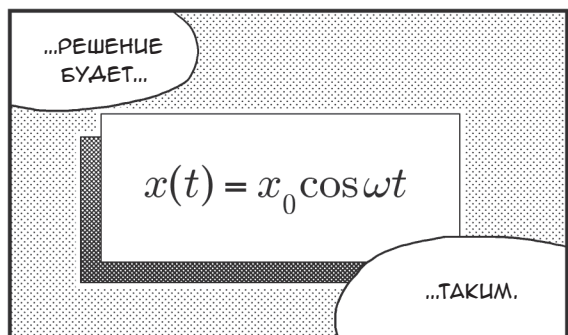
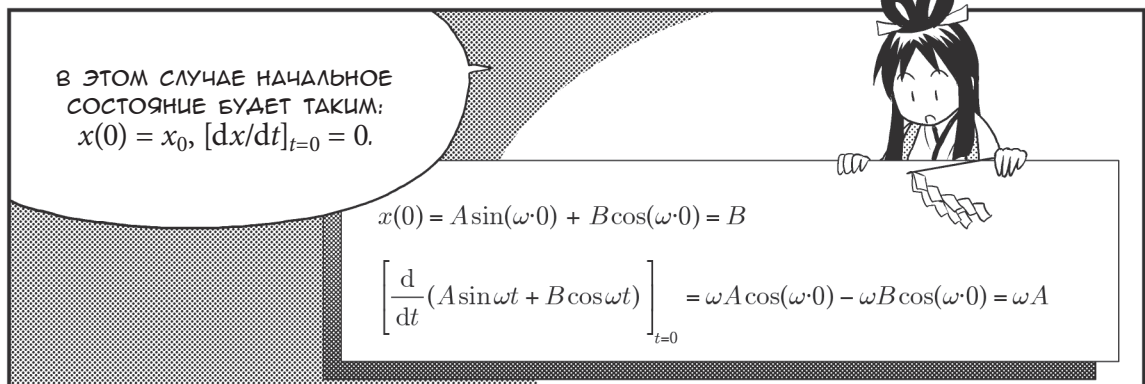
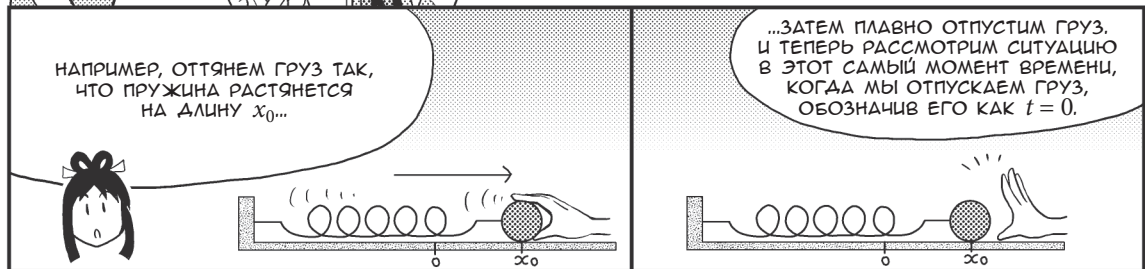
$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad \leftarrow \text{Общее решение без учета воздействия силы сопротивления и внешней силы} \tag{5.5}$$

Если общее решение (5.5) дважды продифференцировать по t :

$$\frac{d^2}{dt^2} (A \sin \omega t + B \cos \omega t) = -\omega^2 (A \sin \omega t + B \cos \omega t),$$

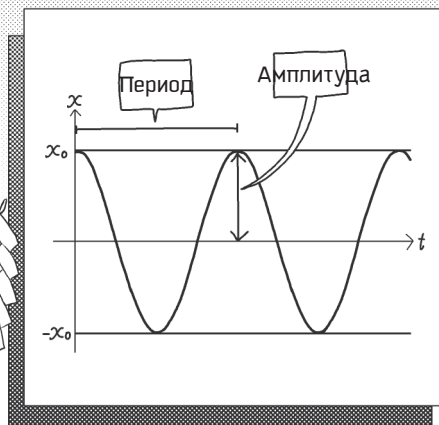
то мы убедимся, что оно действительно является решением уравнения.

² Это сумма элементов, каждый из которых умножается на константу.



В ЭТОМ СЛУЧАЕ ГРУЗ БУДЕТ
СОВЕРШАТЬ ЦИКЛИЧЕСКИЕ
КОЛЕБАНИЯ МЕЖДУ
ЗНАЧЕНИЯМИ $-x_0$ И x_0 .

ОДИНАКОВЫЕ
КОЛЕБАНИЯ, ДА?



ПЕРИОД - ЭТО ВРЕМЯ,
ЗАТРАЧИВАЕМОЕ НА
СОВЕРШЕНИЕ ОДНОГО
КОЛЕБАНИЯ. ОБОЗНАЧИМ
ЭТОТ ПЕРИОД
КОЛЕБАНИЯ КАК T .

ТО ЕСТЬ ЧТОБЫ
В РЕШЕНИИ $\cos \omega t$
 ωt СТАЛО РАВНО 2π ,
НУЖНО ТОЛЬКО, ЧТОБЫ
ВРЕМЯ t БЫЛО РАВНО T .

$$x(t) = x_0 \cos \omega t$$

Период колебаний

$$\omega T = 2\pi$$

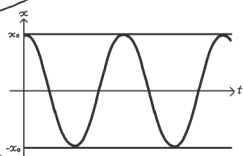
$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ВОТ ТАК.

КРОМЕ ТОГО, x_0 ,
ЗАДАЮЩИЙ ДЛИНУ
КОЛЕБАНИЯ,
НАЗЫВАЕТСЯ
АМПЛИТУДОЙ.

ЕСЛИ
КОЛЕБАНИЕ ИМЕЕТ
ПОСТОЯННУЮ
АМПЛИТУДУ
И ПЕРИОД, ТО...

...ОНО
НАЗЫВАЕТСЯ
ПРОСТЫМ
КОЛЕБАНИЕМ.



ЕСЛИ НЕТ СОПРОТИВЛЕНИЯ
И ВОЗДЕЙСТВИЯ ВНЕШНЕЙ
СИЛЫ, ТАКОЕ КОЛЕБАНИЕ
БУДЕТ ПРОДОЛЖАТЬСЯ
БЕСКОНЕЧНО.

Все время
движется



$\Delta \omega = \sqrt{k/m}$ -
ЭТО СОБСТВЕННАЯ
УГЛОВАЯ ЧАСТОТА
КОЛЕБАНИЙ ЭТОЙ
КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ
СИСТЕМЫ.

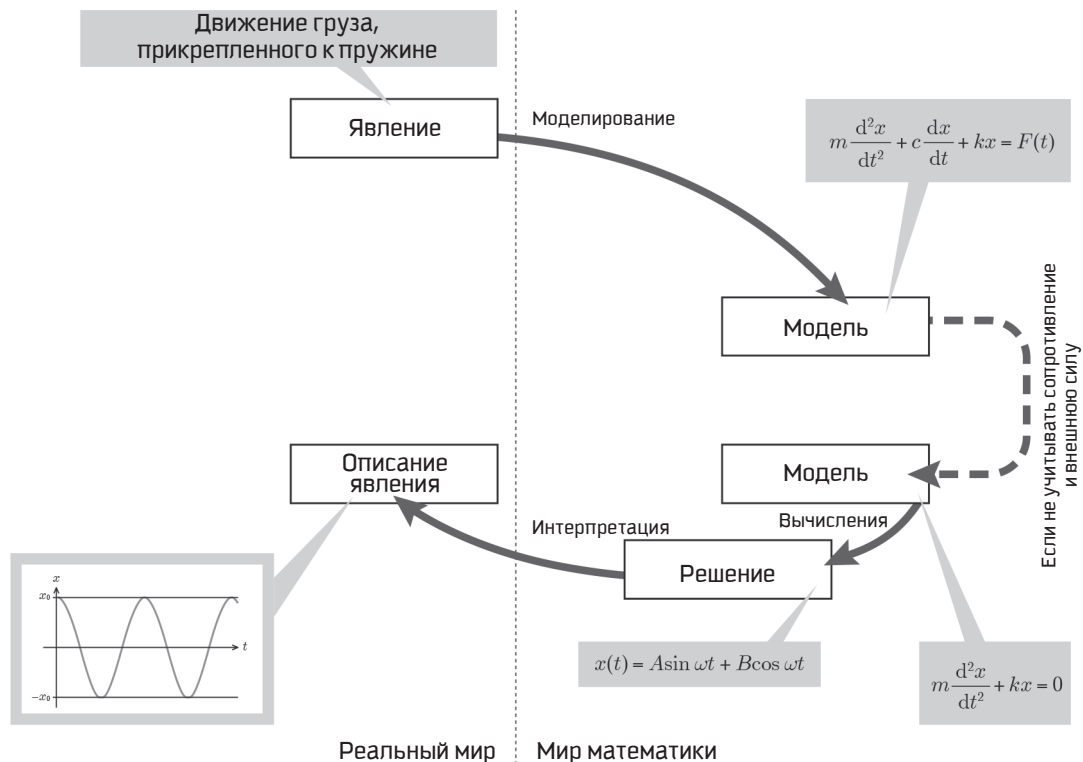
Угловая частота колебаний ω
равна частоте колебаний,
умноженной на удвоенное
число π

Эта формула
используется
очень часто

XMM



Вот эта ситуация.



Так, упростив модель, мы получили решение. И хотя в реальной жизни непременно будет воздействие силы сопротивления, данная модель подходит для описания ситуации, когда сила сопротивления очень слабая

Описание явления движения груза, прикрепленного к пружине, без учета воздействия силы сопротивления и внешней силы



Простые колебания объясняют такие явления, как колебания пружины, в случае когда можно пренебречь сопротивлением (то, что мы рассматривали), или движения маятника с небольшой амплитудой. Кроме того, они являются основой для всех колебательных явлений, поэтому знать их необходимо.

4. КОЛЕБАНИЯ. МОДЕЛЬ 3. КОГДА ЕСТЬ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Решение задачи с учетом силы сопротивления

ИТАК, А ЧТО ЖЕ БУДЕТ, ЕСЛИ МЫ ВКЛЮЧИМ В МОДЕЛЬ СИЛУ СОПРОТИВЛЕНИЯ?

ПАМ

Дайчи, что же будет?

Э... Ну...

О, вернулась!

БЫСТРЕНЬКО ВОЗВРАЩАЕМ!

Сила сопротивления

Внешняя сила

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

Без учета силы сопротивления и внешней силы

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Силу сопротивления возвращаем

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

РАЗДЕЛИМ ОБЕ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ НА m , ПОЛУЧИТСЯ ВОТ ТАК:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

ЭТО ТОЖЕ ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ДА?

ПОДОБНО ТОМУ, КАК МЫ ДЕЛАЛИ В СЛУЧАЕ С ПРОСТЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ, ЧТОБЫ УПРОСТИТЬ ФОРМУЛУ, СДЕЛАЕМ ЗАМЕНУ:

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

И ЕЩЕ ОДНУ:

Хоть такие замены, может быть, и выглядят неестественно, но потом они очень облегчат решение задачи.

$$\frac{c}{m} = 2\gamma$$

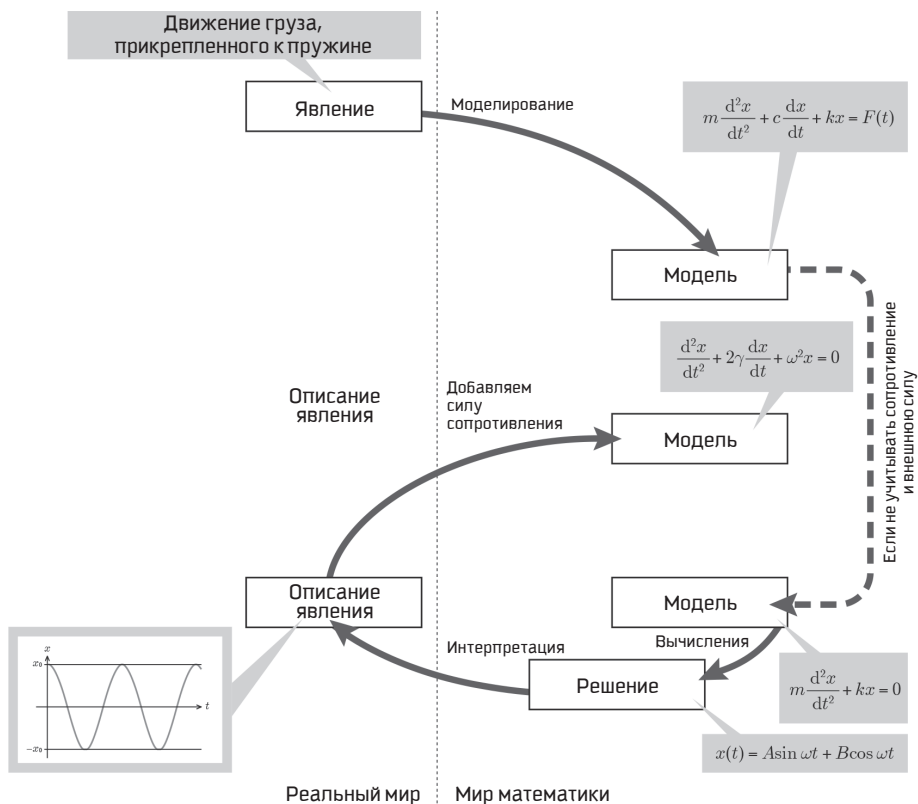
ТЕПЕРЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ МОЖНО ПЕРЕПИСАТЬ ВОТ ТАК:

Уравнение движения с учетом силы упругости и силы сопротивления

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

А ТЕПЕРЬ РЕШИМ ЕГО.

Сейчас наша последовательность действий такая: пройдем цикл моделирования еще раз, добавив к предыдущей простой модели один компонент и немного ее усложнив.



Моделирование движения груза, прикрепленного к пружине, с добавлением воздействия силы сопротивления

Итак, попробуем найти общее решение для случая, когда не учтено только воздействие внешней силы. Здесь тоже внимательно посмотрим на полученное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0.$$

Хорошо.

Если посмотреть внимательно, то видно, что сумма x , производной от x и второй производной x , равна нулю³. То есть функция $x(t)$ должна быть такой, вид которой не изменится при дифференцировании.

³ Так как мы уже делали такое в случае с простыми колебаниями, вы, должно быть, заметили эту особенность быстро.



Функция, которая не меняется при дифференцировании... Где-то такое уже было...



Это было на стр. 53. Если посмотреть на производную экспоненциальной функции:

$$\frac{d}{dt}e^t = e^t,$$

то очевидно, что эта функция не изменяется при дифференцировании. Если умело использовать это свойство экспоненциальной функции, можно попробовать решить дифференциальное уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$.



Если просто дифференцировать функцию e^t по t , не появится никаких коэффициентов. Сколько раз ни дифференцируй, функция не изменится. Однако в дифференциальном уравнении $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$ каждый компонент умножается на коэффициент. Поэтому, чтобы решить уравнение, применим одну хитрость. Исходя из основных свойств производных (см. стр. 53)⁴, если λ – это константа, то:

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t},$$

то есть при многократном дифференцировании получим вот что:

$$\frac{d^n}{dt^n}e^{\lambda t} = \lambda^n e^{\lambda t}.$$



Появился коэффициент, теперь как-то можем использовать это в нашем дифференциальном уравнении, да?



Тогда такое решение дифференциального уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$:

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad \leftarrow \text{Допустимое решение} \quad (5.6)$$

будет допустимым. Теперь попробуем определить значение константы λ , удовлетворяющей условиям уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$.

Подставим решение (5.6) в уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$:

$$\frac{d^2}{dt^2}e^{\lambda t} + 2\gamma \frac{d}{dt}e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0.$$

Продифференцируем:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma \lambda e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0.$$

Вынесем $e^{\lambda t}$ за скобки:

$$(\lambda^2 + 2\gamma \lambda + \omega^2)e^{\lambda t} = 0.$$

⁴ Дифференцирование сложных функций.

Так как $e^{\lambda t}$ никогда не может быть равным нулю⁵, значит, из условия уравнения (5.7) следует, что должно выполняться такое равенство:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0. \quad (5.8)$$



Получилось квадратное уравнение относительно λ .



Решение этого алгебраического уравнения⁶ будет таким⁷:

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}. \quad (5.9)$$

А значит, что двум решениям (5.9) алгебраического уравнения (5.8) будут соответствовать следующие два решения дифференциального уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0$:

$$x_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = e^{\lambda_2 t}. \quad \leftarrow \text{Решения дифференциального уравнения} \quad (5.10)$$

Итак, мы получили решения.



Однако эти решения не содержат произвольной постоянной, а значит, они не являются общими решениями. Но мы уже знаем, что нужно делать в таком случае.



Метод вариации произвольных постоянных, да?



Да. Чтобы получить общее решение, решение (5.10) умножим на функцию $c_1(t)$ от t :

$$x(t) = c_1(t)e^{\lambda_1 t}. \quad \leftarrow \text{Решение с допустимым коэффициентом} \quad (5.11)$$

Теперь применим метод вариации произвольных постоянных. Продифференцируем (5.11) по t :

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{dc_1(t)}{dt} e^{\lambda_1 t} + c_1(t) \frac{de^{\lambda_1 t}}{dt} \\ &= \frac{dc_1(t)}{dt} e^{\lambda_1 t} + c_1(t) \lambda_1 e^{\lambda_1 t}; \\ \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= \frac{d^2c_1(t)}{dt^2} e^{\lambda_1 t} + \frac{dc_1(t)}{dt} \frac{de^{\lambda_1 t}}{dt} + \lambda_1 \frac{dc_1(t)}{dt} e^{\lambda_1 t} + c_1(t) \lambda_1 \frac{de^{\lambda_1 t}}{dt} \\ &= \frac{d^2c_1(t)}{dt^2} e^{\lambda_1 t} + 2\lambda_1 \frac{dc_1(t)}{dt} e^{\lambda_1 t} + c_1(t) \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t}. \end{aligned}$$

Подставим результаты в дифференциальное уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0$:

⁵ График функции не пересекает ось x .

⁶ Общая формула решения квадратного уравнения: $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$.

⁷ Вы заметили? Решения получились такими простыми благодаря тому, что перед коэффициентом γ стоит 2.

$$\left(\frac{d^2 c_1(t)}{dt^2} e^{\lambda_1 t} + 2\lambda_1 \frac{dc_1(t)}{dt} e^{\lambda_1 t} + c_1(t) \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} \right) + 2\gamma \left(\frac{dc_1(t)}{dt} e^{\lambda_1 t} + c_1(t) \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \right) + \omega^2 c_1(t) e^{\lambda_1 t} = 0.$$

Вынесем $e^{\lambda_1 t}$ за скобки:

$$\left\{ \frac{d^2 c_1(t)}{dt^2} + 2(\lambda_1 + \gamma) \frac{dc_1(t)}{dt} + (\lambda_1^2 + 2\gamma\lambda_1 + \omega^2) c_1(t) \right\} e^{\lambda_1 t} = 0. \quad (5.12)$$



Не надо пугаться сложного вида. Здесь тоже, так как $e^{\lambda_1 t}$ не может быть равно нулю, то чтобы выполнялось равенство (5.12), необходимо, чтобы:

$$\frac{d^2 c_1(t)}{dt^2} + 2(\lambda_1 + \gamma) \frac{dc_1(t)}{dt} + (\lambda_1^2 + 2\gamma\lambda_1 + \omega^2) c_1(t) = 0.$$

Более того, из формулы (5.8) следует, что $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$, поэтому:

$$\frac{d^2 c_1(t)}{dt^2} + 2(\lambda_1 + \gamma) \frac{dc_1(t)}{dt} = 0.$$

Умножим на $e^{2(\lambda_1 + \gamma)t}$ обе части уравнения⁸ и преобразуем его:

$$e^{2(\lambda_1 + \gamma)t} \frac{d^2 c_1(t)}{dt^2} + 2(\lambda_1 + \gamma) e^{2(\lambda_1 + \gamma)t} \frac{dc_1(t)}{dt} = 0;$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(e^{2(\lambda_1 + \gamma)t} \frac{dc_1(t)}{dt} \right) = 0.$$

Теперь стало гораздо яснее. Более того, из решения квадратного уравнения (5.9) следует:

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}.$$

Если же сложить λ_1 и λ_2 , получим:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \right) + \left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \right) = -2\gamma.$$

Если теперь использовать это соотношение, получим:

$$\frac{d}{dt} \left(e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \frac{dc_1(t)}{dt} \right) = 0.$$

Теперь проинтегрируем обе части по t . Тогда если C – произвольная постоянная, то получается:

⁸ Выглядит несколько технично, но это часто используемый метод.

$$e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \frac{dc_1(t)}{dt} = C.$$

Выведем отсюда функцию $c_1(t)$. Тогда если α – интегральная константа, то:

$$c_1(t) = C \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} dt + \alpha. \quad (5.12)$$

 Теперь нужно рассмотреть по отдельности две ситуации, когда $\lambda_1 = \lambda_2$ и когда λ_1 и λ_2 разные.

 Сначала рассмотрим ситуацию, когда $\lambda_1 = \lambda_2$, в этом случае $e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 1$, поэтому функция (5.13) будет выглядеть так:

$$c_1(t) = C \int dt + \alpha. \quad (5.13)$$

Решив интеграл, получим:

$$c_1(t) = Ct + \alpha.$$

Теперь для получения общего решения дифференциального уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$ подставим значение функции $c_1(t)$ в решение (5.11):

$$x(t) = (Ct + \alpha)e^{\lambda_1 t}.$$

Однако так как решения квадратного уравнения (5.9):

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2},$$

то при $\lambda_1 = \lambda_2$ получим, что:

$$-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2};$$

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = 0;$$

$$\therefore \omega^2 = \gamma^2.$$

А следовательно:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma.$$

В итоге, если константу C заменить на β , общее решение будет таким:

$$x(t) = (\alpha + \beta t)e^{-\gamma t}, \quad \leftarrow \text{Общее решение, при условии когда } \omega^2 = \gamma^2$$

где α и β – произвольные константы.



Теперь рассмотрим ситуацию, когда $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Так как функция (5.13) содержит интеграл экспоненциальной функции, то, решив интеграл, получим:

$$c_1(t) = \frac{C}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \alpha.$$

Исходя из решений квадратного уравнения (5.9):

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2},$$

если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то и $\omega^2 \neq \gamma^2$, значит, знак подкоренного выражения $\gamma^2 - \omega^2$ будет зависеть от того, какое из условий выполняется:

$$\omega^2 > \gamma^2, \quad \omega^2 < \gamma^2.$$

То есть нам нужно рассмотреть по отдельности обе ситуации.



Сначала рассмотрим ситуацию, когда $\omega^2 > \gamma^2$. В этом случае в решениях квадратного уравнения (5.9)

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

подкоренное выражение будет отрицательным, а значит, решение будет комплексным числом. Тогда если i – мнимая единица, то можно записать так:

$$\lambda_1 = -\gamma + i\Omega, \quad \lambda_2 = -\gamma - i\Omega,$$

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}.$$

А значит, общее решение, при условии что α и β – произвольные постоянные, будет таким:

$$x(t) = \alpha e^{-\gamma t + i\Omega t} + \beta e^{-\gamma t - i\Omega t}. \quad \leftarrow \text{Общее решение при условии, когда } \omega^2 > \gamma^2$$

А что же будет, если $\omega^2 < \gamma^2$. В этом случае решения квадратного уравнения (5.9)

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

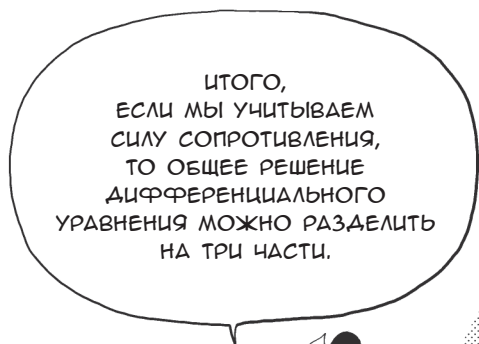
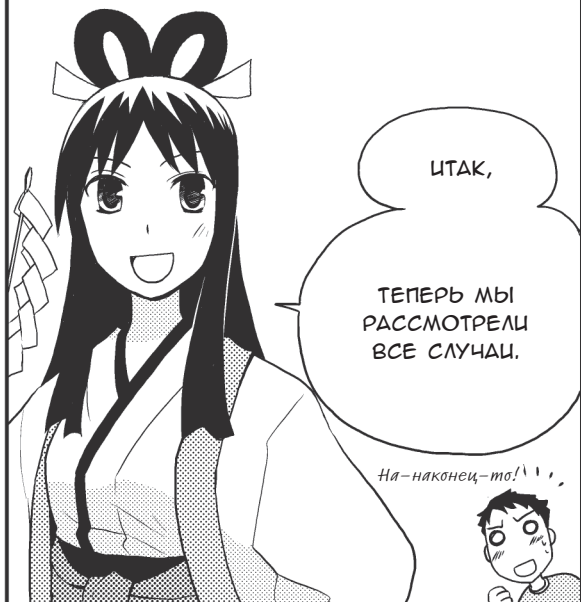
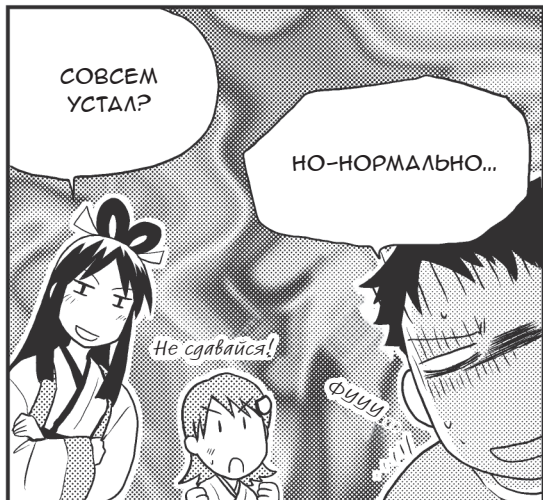
будут обычными числами, и записать их можно так:

$$\lambda_1 = -\gamma + \Gamma, \quad \lambda_2 = -\gamma - \Gamma,$$

$$\Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}.$$

А значит, общее решение при условии, что α и β – произвольные постоянные, будет таким:

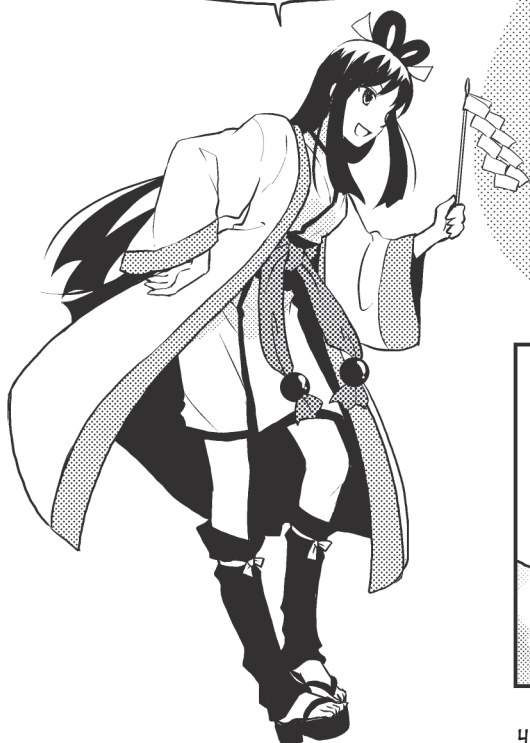
$$x(t) = \alpha e^{-\gamma t + \Gamma t} + \beta e^{-\gamma t - \Gamma t}. \quad \leftarrow \text{Общее решение при условии, когда } \omega^2 < \gamma^2$$



$$\omega^2 > \gamma^2: x(t) = \alpha e^{-\gamma t + i\Omega t} + \beta e^{-\gamma t - i\Omega t}, \quad \Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

$$\omega^2 = \gamma^2: x(t) = (\alpha + \beta t)e^{-\gamma t}$$

$$\omega^2 < \gamma^2: x(t) = \alpha e^{-\gamma t + \Gamma t} + \beta e^{-\gamma t - \Gamma t}, \quad \Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$



■ Решение с учетом воздействия силы сопротивления. Случай 1 (затухающие колебания)



Сначала рассмотрим ситуацию, когда $\omega^2 > \gamma^2$.



В этом случае общее решение, при условии что α и β – произвольные постоянные, выглядит так:

$$x(t) = \alpha e^{-\gamma t + i\Omega t} + \beta e^{-\gamma t - i\Omega t}, \quad \Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}.$$

Если разделим экспоненту на действительную и комплексную части, то получим вот что:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(\alpha e^{i\Omega t} + \beta e^{-i\Omega t}). \quad (5.15)$$



Однако если к выражению в скобках общего решения (5.15) применить формулу Эйлера⁹

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x,$$

то получим:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} \{ \alpha (\cos \Omega t + i \sin \Omega t) + \beta (\cos \Omega t - i \sin \Omega t) \}; \\ &= e^{-\gamma t} \{ (\alpha + \beta) \cos \Omega t + i(\alpha - \beta) \sin \Omega t \}; \\ &= e^{-\gamma t} (\alpha \cos \Omega t + \beta \sin \Omega t), \end{aligned} \quad (5.16)$$

где мы обозначили $a = \alpha + \beta$, $b = i(\alpha - \beta)$.



Это решение похоже на общее решение для простых колебаний с циклом $2\pi/\omega$, только цикл здесь $2\pi/\Omega$ и решение умножено на экспоненциальную функцию $e^{-\gamma t}$. Какие же колебания описываются такой функцией?



Здесь, так же как в случае с простыми колебаниями, оттянем груз, прикрепленный к пружине, на расстояние x_0 . В момент времени $t = 0$ потихоньку отпустим и рассмотрим ситуацию в этот момент. Начальное состояние будет $t = 0$, $x(0) = x_0$, $[dx/dt]_{t=0} = 0$, тогда из формулы (5.16) следует:

$$x(0) = e^{-\gamma \cdot 0} \{ \alpha \cos(\Omega \cdot 0) + \beta \sin(\Omega \cdot 0) \} = a = x_0. \quad (5.17)$$

⁹ На самом деле это определение было введено, чтобы расширить область использования экспоненциальных функций также на те случаи, когда показатель степени – комплексное число. Но это уже совсем другая история...

Учитывая, что $a = x_0$, продифференцируем уравнение (5.16) по t :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\gamma e^{-\gamma t} (a \cos \Omega t + b \sin \Omega t) + e^{-\gamma t} (-a\Omega \sin \Omega t + b\Omega \cos \Omega t); \\ &= e^{-\gamma t} \{(-\gamma a + b\Omega) \cos \Omega t - (\gamma b + a\Omega) \sin \Omega t\}.\end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned}\left[\frac{dx}{dt}\right]_{t=0} &= e^{-\gamma \cdot 0} \{(-\gamma a + b\Omega) \cos(\Omega \cdot 0) - (-\gamma b + a\Omega) \sin(\Omega \cdot 0)\}; \\ &= -\gamma a + b\Omega = 0; \\ \therefore b &= \frac{\gamma}{\Omega} x_0.\end{aligned}\tag{5.17}$$

Из формул (5.17) и (5.18) получается искомое решение:

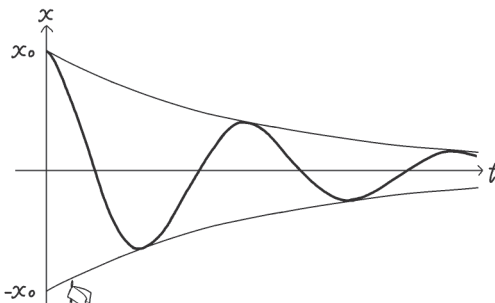
$$x(t) = e^{-\gamma t} x_0 \left(\cos \Omega t + \frac{\gamma}{\Omega} \sin \Omega t \right).$$

ГРАФИК БУДЕТ
ВЫГЛЯДЕТЬ
ВОТ ТАК.

АМПЛИТУДА ГРУЗА,
СОВЕРШАЮЩЕГО
КОЛЕБАНИЯ С ПЕРИОДОМ
 $2\pi/\Omega$, ПОСТЕПЕННО
УМЕНЬШАЕТСЯ.

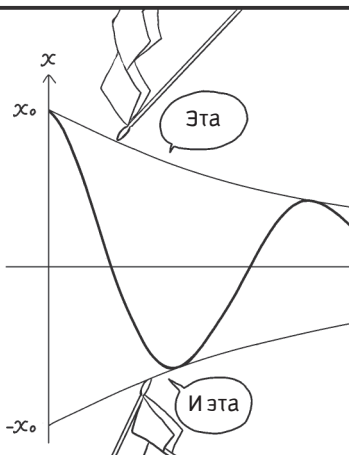
ТАКИЕ КОЛЕБАНИЯ
НАЗЫВАЮТСЯ
ЗАТУХАЮЩИМИ.

Решение для случая, когда $\omega^2 > \gamma^2$
[затухающие колебания]



ПОСМОТРИМ НА ЛИНИИ,
СОЕДИНЯЮЩИЕ ПИКИ
КОЛЕБАНИЙ.

ЭТО ЖЕ
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ
ФУНКЦИИ!



АМПЛИТУДА
ПОСТЕПЕННО
УМЕНЬШАЕТСЯ?

УГУ.

Вот оно как.

ДА, ЭТО ФУНКЦИЯ $e^{-\gamma t}$.

ЗДЕСЬ γ НАЗЫВАЕТСЯ
КОЭФФИЦИЕНТОМ
ЗАТУХАНИЯ КОЛЕБАНИЙ
И ОПРЕДЕЛЯЕТ СКОРОСТЬ
УМЕНЬШЕНИЯ
АМПЛИТУДЫ.

Коэффициент затухания

γ

ВЕЛИЧИНА, ОБРАТНАЯ
КОЭФФИЦИЕНТУ ЗАТУХАНИЯ
 $\tau = 1/\gamma$,
НАЗЫВАЕТСЯ
ПОСТОЯННОЙ ВРЕМЕНИ.

Постоянная времени

$$\tau = 1/\gamma$$

ПЕРИОД КОЛЕБАНИЙ, ДЕЛЕННЫЙ
НА ПОСТОЯННУЮ ВРЕМЕНИ
 $T/\tau = 2\pi\gamma/\Omega$,
ДАЕТ ТАК НАЗЫВАЕМЫЙ
ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ДЕКРЕМЕНТ
КОЛЕБАНИЙ.

Логарифмический декремент
колебаний

$$T/\tau = 2\pi\gamma/\Omega$$

С КАЖДЫМ ЦИКЛОМ
АМПЛИТУДА ЗАТУХАЮЩИХ
КОЛЕБАНИЙ БУДЕТ
УМЕНЬШАТЬСЯ В $e^{-T/\tau}$ РАЗ.

КРОМЕ ТОГО, ПЕРИОД
ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ...

$$\lambda_1 = -\gamma + i\Omega, \quad \lambda_2 = -\gamma - i\Omega$$

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

О, формулы,
которые были
недавно...

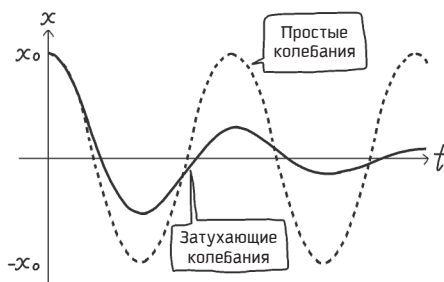
...ИСХОДЯ
ИЗ ЭТИХ
ФОРМУЛ....

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} > \frac{2}{\omega}$$

...ВОТ ЧЕМУ
РАВЕН.

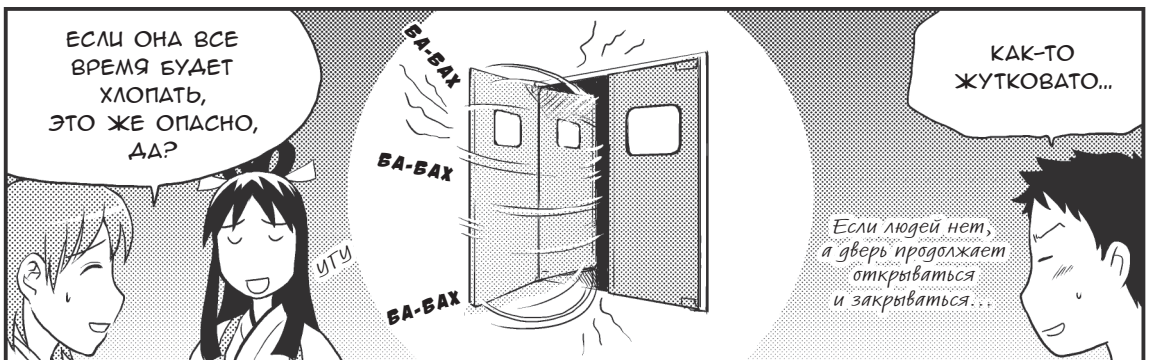
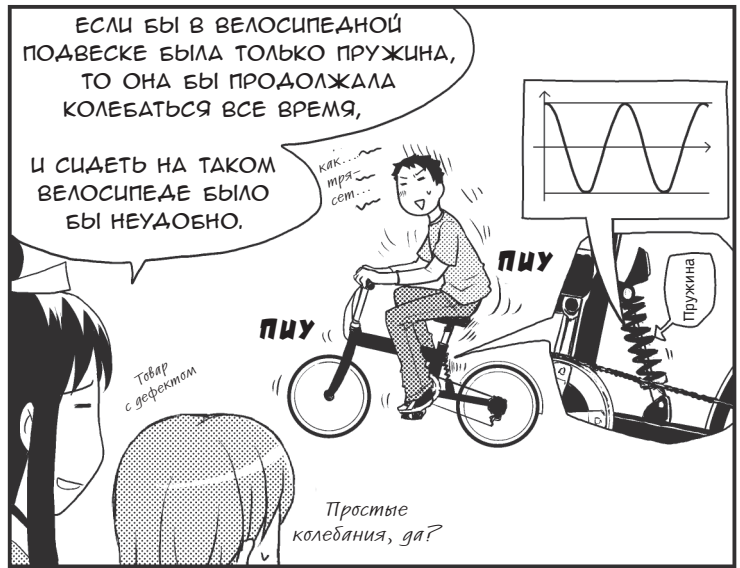
ПОЛУЧАЕТСЯ,
ОН ДЛИННЕЕ, ЧЕМ
ПЕРИОД ПРОСТЫХ
КОЛЕБАНИЙ - $2\pi/\omega$.

Затухающие колебания и простые колебания



ИЗ-ЗА СИЛЫ
СОПРОТИВЛЕНИЯ
ЭТИ КОЛЕБАНИЯ БУДУТ
НЕМНОГО МЕДЛЕННЕЕ,
ЧЕМ ПРОСТЫЕ
КОЛЕБАНИЯ.

Вот
и график



■ Решение с учетом воздействия силы сопротивления. Случай 2 (сильное затухание)



Далее рассмотрим ситуацию, когда $\omega^2 < \gamma^2$.

В этом случае общее решение, при условии что α и β – произвольные постоянные, выглядит так:

$$x(t) = \alpha e^{-\gamma t + i\Omega t} + \beta e^{-\gamma t - i\Omega t}, \quad \Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}. \quad (5.19)$$

Если разделим экспоненту на две части, то получим:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(\alpha e^{\Gamma t} + \beta e^{-\Gamma t}). \quad (5.20)$$

Посмотрев на эту формулу, нельзя найти элемент, относящийся непосредственно к колебаниям¹⁰. Какое же действие описывает это решение?

Здесь, как и раньше, оттянем груз, прикрепленный к пружине, на расстояние x_0 . В момент времени $t = 0$ потихоньку отпустим и рассмотрим ситуацию в этот момент. Начальное состояние будет $t = 0$, $x(0) = x_0$, $[dx/dt]_{t=0} = 0$, тогда из общего решения (5.20) следует:

$$x(0) = e^{-\gamma \cdot 0}(\alpha e^{\Gamma \cdot 0} + \beta e^{-\Gamma \cdot 0}) = \alpha + \beta = x_0. \quad (5.21)$$

Продифференцируем общее решение (5.20) по t :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\gamma e^{-\gamma t}(\alpha e^{\Gamma t} + \beta e^{-\Gamma t}) + e^{-\gamma t}(\alpha \Gamma e^{\Gamma t} - \beta \Gamma e^{-\Gamma t}); \\ &= e^{-\gamma t}\{(\Gamma - \gamma)\alpha e^{\Gamma t} - (\Gamma + \gamma)\beta e^{-\Gamma t}\}, \end{aligned}$$

следовательно, вот что получится:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dx}{dt} \right]_{t=0} &= e^{-\gamma \cdot 0}\{(\Gamma - \gamma)\alpha e^{\Gamma \cdot 0} - (\Gamma + \gamma)\beta e^{-\Gamma \cdot 0}\} = 0; \\ \therefore (\Gamma - \gamma)\alpha - (\Gamma + \gamma)\beta &= 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

¹⁰ Так как это экспоненциальная функция с действительными числами в показателе, то, значит, функция будет монотонно возрастать или убывать. Чтобы функция описывала колебания, необходимо, чтобы в показателе были комплексные числа.

Исходя из формул (5.21) и (5.22):

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x_0 \\ (\Gamma - \gamma)\alpha - (\Gamma + \gamma)\beta = 0; \end{cases}$$

$$\therefore \alpha = \frac{x_0}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{\Gamma} \right), \quad \beta = \frac{x_0}{2} \left(1 - \frac{\gamma}{\Gamma} \right).$$

А значит, решение будет:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left\{ \frac{x_0}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{\Gamma} \right) e^{\Gamma t} + \frac{x_0}{2} \left(1 - \frac{\gamma}{\Gamma} \right) e^{-\Gamma t} \right\}.$$

Можно оставить решение в таком виде, а можно использовать гиперболическую функцию¹¹:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

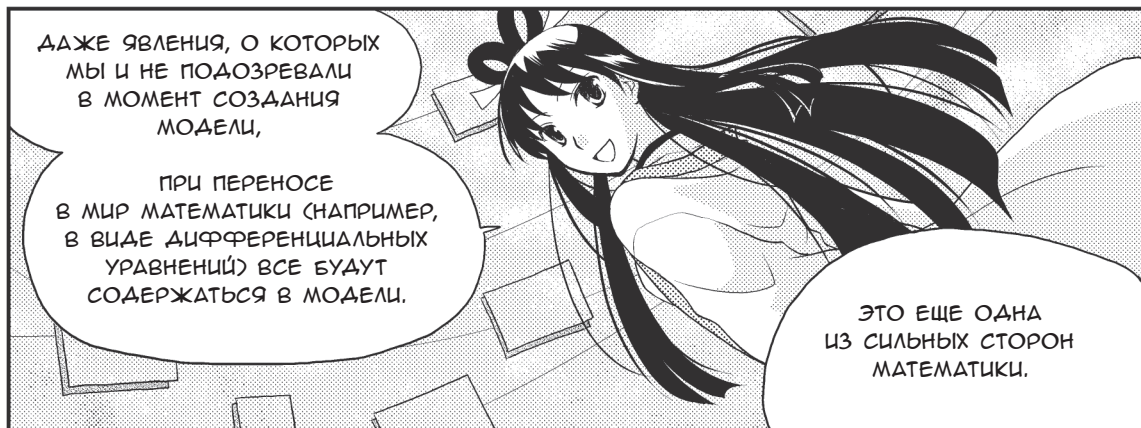
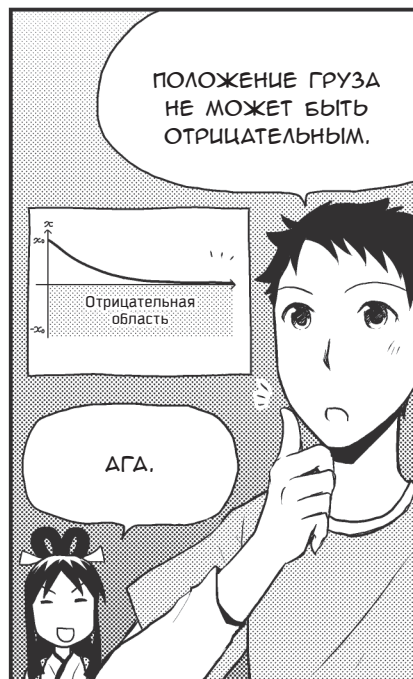
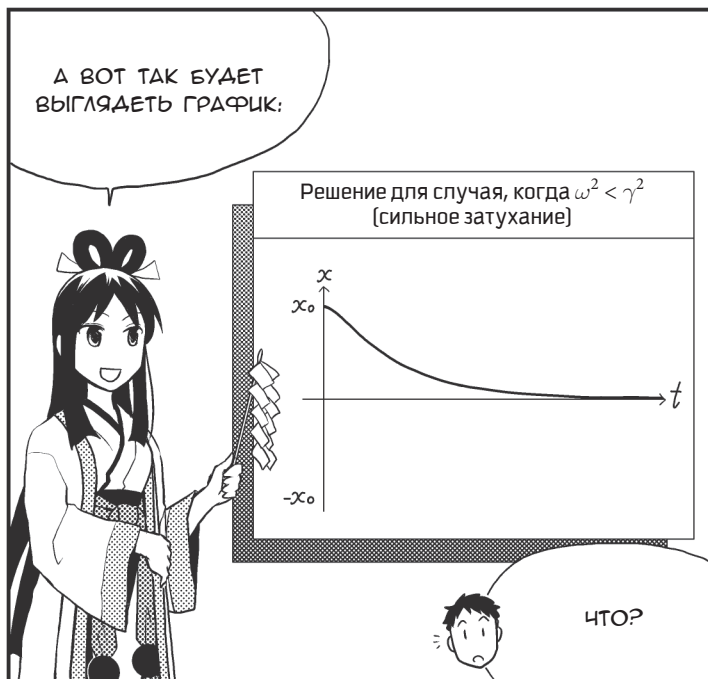
тогда получим уравнение, похожее на формулу Эйлера:

$$e^{\pm x} = \cosh x \pm \sinh x,$$

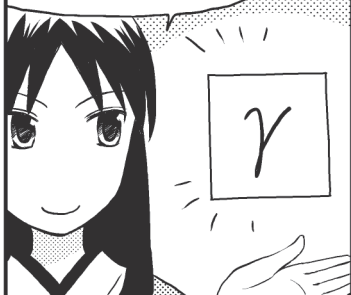
следовательно, общее решение будет выглядеть немного проще:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} \left\{ \frac{x_0}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{\Gamma} \right) (\cosh \Gamma t + \sinh \Gamma t) + \frac{x_0}{2} \left(1 - \frac{\gamma}{\Gamma} \right) (\cosh \Gamma t - \sinh \Gamma t) \right\}; \\ &= e^{-\gamma t} x_0 \left(\cosh \Gamma t + \frac{\gamma}{\Gamma} \sinh \Gamma t \right). \end{aligned}$$

¹¹ Это называется гиперболический синус и гиперболический косинус.



В СЛУЧАЕ СИЛЬНОГО
ЗАТУХАНИЯ СТЕПЕНЬ
ЗАТУХАНИЯ
ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ
ВЕЛИЧИНОЙ
КОЭФФИЦИЕНТА γ .



ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ
ПРЕДСТАВЛЯЕТ СОБОЙ
СУММУ ДВУХ
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ
ФУНКЦИЙ.



ВОТ ОНО

$$x(t) = \alpha e^{-\gamma t + \Gamma t} + \beta e^{-\gamma t - \Gamma t}, \quad \Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Недавно была
эта формула, да?



Угу

ЕСЛИ В ЭТОМ
ЭЛЕМЕНТЕ...

$$e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t}$$

... t ПРИНИМАЕТ
БОЛЬШОЕ ЗНАЧЕНИЕ,
ТО ЗАТУХАНИЕ
ПРОИСХОДИТ СРАЗУ.

А В ЭТОМ...

$$e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t}$$

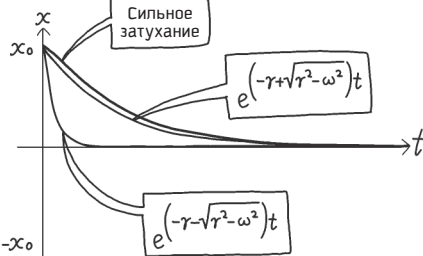
...ЗАТУХАНИЕ
ИДЕТ МЕДЛЕННО.

В РЕЗУЛЬТАТЕ В ЦЕЛОМ
ПРОИСХОДИТ МЕДЛЕННОЕ
СНИЖЕНИЕ.



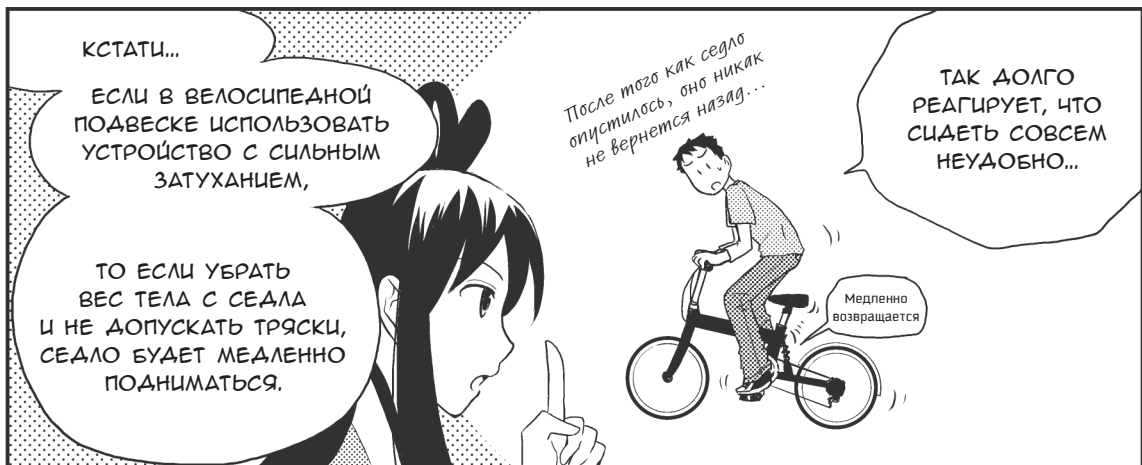
$$e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t}$$

Различие в степени затухания
в зависимости от элементов



Э...





■ Решение с учетом воздействия силы сопротивления. Случай 3 (критическое затухание)



И наконец, ситуация, когда $\omega^2 = \gamma^2$.



В этом случае общее решение при условии, что α и β – произвольные постоянные, выглядит так:

$$x(t) = (\alpha + \beta t)e^{-\gamma t}. \quad (5.23)$$

В этом случае тоже не получается найти элемент, относящийся к колебаниям.



Здесь снова оттянем груз, прикрепленный к пружине, на расстояние x_0 . В момент времени $t = 0$ потихоньку отпустим и рассмотрим ситуацию в этот момент. Начальное состояние будет $t = 0$, $x(0) = x_0$, $[dx/dt]_{t=0} = 0$, тогда из общего решения (5.23) следует:

$$x(0) = (\alpha + \beta \cdot 0)e^{-\gamma \cdot 0} = \alpha = x_0. \quad (5.24)$$

Учитывая, что $\alpha = x_0$, продифференцируем общее решение (5.23) по t :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \beta e^{-\gamma t} + (\alpha + \beta t)(-\gamma)e^{-\gamma t}; \\ &= \{\beta - \gamma(\alpha + \beta t)\}e^{-\gamma t}, \end{aligned}$$

следовательно:

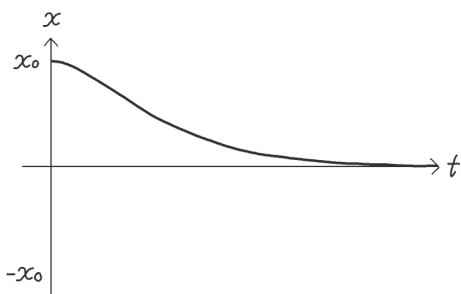
$$\begin{aligned} \left[\frac{dx}{dt} \right]_{t=0} &= \{\beta - \gamma(\alpha + \beta \cdot 0)\}e^{-\gamma \cdot 0} = 0; \\ \therefore \beta &= \gamma x_0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Исходя из формул (5.24) и (5.25), получаем искомое решение:

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_0 + \gamma x_0 t)e^{-\gamma t}; \\ &= x_0(1 + \gamma t)e^{-\gamma t}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

А ВОТ И ГРАФИК.

Решение для случая, когда $\omega^2 = \gamma^2$
(критическое затухание)



В ЭТОМ СЛУЧАЕ
ПОЗИЦИЯ ГРУЗА
ТАКЖЕ НЕ ПЕРЕСЕКАЕТ
КООРДИНАТНУЮ ОСЬ.

ЗАТУХАНИЕ
ПРОИСХОДИТ
БЕЗ КОЛЕБАНИЙ.

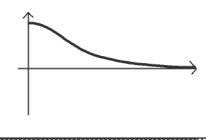
ЭТО НАЗЫВАЕТСЯ
КРИТИЧЕСКОЕ
ЗАТУХАНИЕ.

Критическое
затухание

"КРИТИЧЕСКИЙ"
ЗДЕСЬ В СМЫСЛЕ
"ПРЕДЕЛЬНЫЙ".

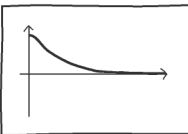
ПРЕДЕЛЬНЫЙ
ДЛЯ
ЗАТУХАЮЩИХ
КОЛЕБАНИЙ
И ДЛЯ СИЛЬНОГО
ЗАТУХАНИЯ.

Критическое затухание

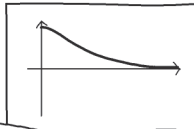


ХММ?..

Сильное затухание



Критическое
затухание



НО НА ВИД ГРАФИК
КРИТИЧЕСКИХ ЗАТУХАНИЙ
НЕ ОЧЕНЬ-ТО ОТЛИЧАЕТСЯ
ОТ ГРАФИКА СИЛЬНЫХ
ЗАТУХАНИЙ.

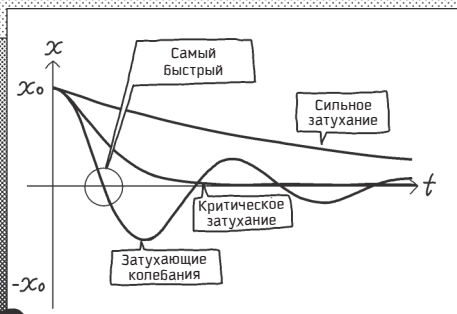
Очень
похожи

ТАК И ЕСТЬ.

ОДНАКО У КРИТИЧЕСКИХ
ЗАТУХАНИЙ ЕСТЬ ВАЖНОЕ
ЗНАЧЕНИЕ.

ЕСЛИ СОПРОТИВЛЕНИЕ
СТАНЕТ МЕНЬШЕ,
ТО КРИТИЧЕСКОЕ
ЗАТУХАНИЕ ПРЕВРАТИТСЯ
В ЗАТУХАЮЩИЕ
КОЛЕБАНИЯ.

НО В ЭТОМ СЛУЧАЕ
МОМЕНТ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ
ОСИ КООРДИНАТ
ДЛЯ ЗАТУХАЮЩИХ
КОЛЕБАНИЙ НАСТУПИТ
БЫСТРЕЕ ВСЕГО!



..... ?

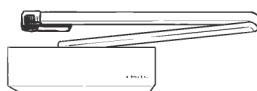
МММ....

Ничего не понял



ЕСТЬ ТАКОЕ
ПРИСПОСОБЛЕНИЕ -
ДВЕРНОЙ ДОВОДИЧК.

ПРУЖИНА И ДЕМПФЕР
В НЕМ НАСТРОЕНЫ
ОЧЕНЬ БЛИЗКО
К КРИТИЧЕСКОМУ
ЗАТУХАНИЮ.



А!

ЭТО ШТУКА,
КОТОРУЮ НА ДВЕРЯХ
ПОДЪЕЗДОВ ЧАСТО
ИСПОЛЬЗУЮТ, ДА?

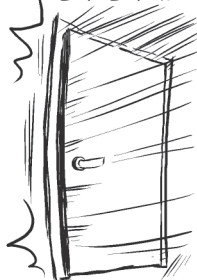
У меня в коридоре
тоже есть такая.



ЕСЛИ ДОВОДИЧК
НАСТРОИТЬ
НА ОБЫЧНЫЕ
ЗАТУХАЮЩИЕ
КОЛЕБАНИЯ,
ТО МОМЕНТ
ЗАХЛОПЫВАНИЯ ДВЕРИ
НАСТУПИТ ОЧЕНЬ
БЫСТРО, И ДВЕРЬ
МОЖЕТ
СЛОМАТЬСЯ.

Затухающие
колебания

БАБАХ



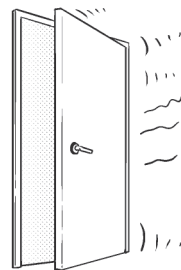
ТАКАЯ СИЛИЩА,
ЧТО НЕ БУДЬ РАМЫ,
ОНА БЫ ВЫЛЕТЕЛА!



ЕСЛИ ЖЕ НАСТРОИТЬ
НА СИЛЬНОЕ
ЗАТУХАНИЕ,

Сильное
затухание

ТО ДВЕРЬ БУДЕТ
ЗАКРЫВАТЬСЯ
ОЧЕНЬ МЕДЛЕННО.



...ДАЖЕ
РАЗДРАЖАЕТ,
ДА?



Закрывайся уже!

ЕСЛИ ЖЕ ЗАТУХАНИЕ КРИТИЧЕСКОЕ, ТО ЧЕРЕЗ ПРОМЕЖУТОК ВРЕМЕНИ, РАВНЫЙ ПРИМЕРНО ПОЛОВИНЕ ОТ ЦИКЛА КОЛЕБАНИЙ, ПОЗИЦИЯ ГРУЗА ПРАКТИЧЕСКИ ДОСТИГНЕТ ОСИ КООРДИНАТ.

ОДНАКО, НЕ ПЕРЕСЕЧЕТ ЕЕ.

Критическое затухание

Простые колебания

ДАВЕРЬ В ЭТОМ СЛУЧАЕ ЗАКРОЕТСЯ ПЛАВНО И СПОКОЙНО.

ПАМ

ПОНЯТНО. ТАК КУДА ЛУЧШЕ!

ДВИЖЕНИЕ СТРЕЛКИ В ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРАХ ТОЖЕ НАСТРОЕНО НА КРИТИЧЕСКОЕ ЗАТУХАНИЕ, ЧТОБЫ УДОБНЕЕ БЫЛО ДЕЛАТЬ ЗАМЕРЫ.

Не отрегулировано

Газражает

Весы

ПАМ-ПАМ-ПАМ

Остатки вливайся скорее

КРИТИЧЕСКОЕ ЗАТУХАНИЕ ОЧЕНЬ ПОЛЕЗНОЕ, ДА?

Амперметр

Отрегулировано

Наконец-то

ПАМ

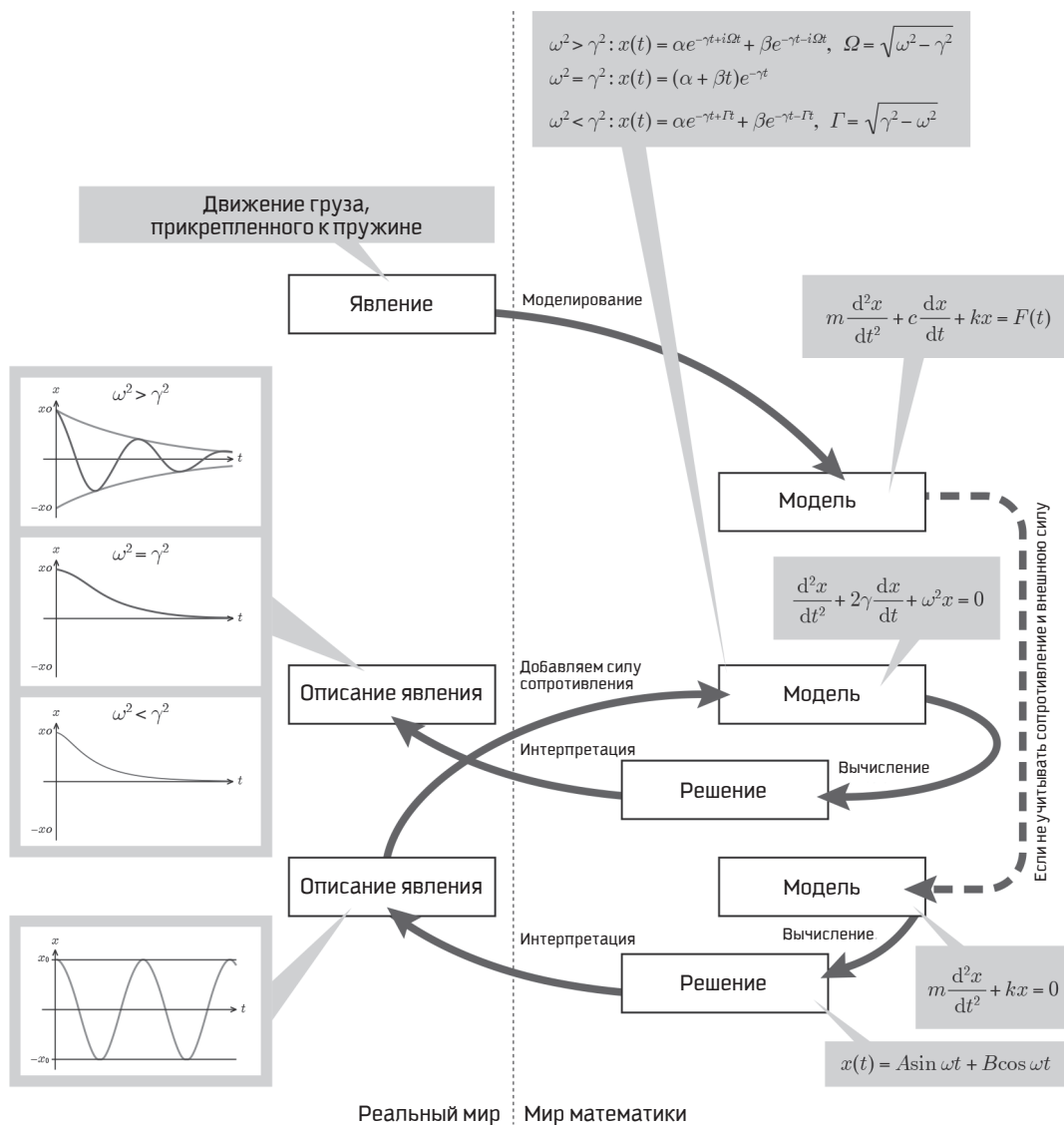
И ДЛЯ ВЕЛОСИПЕДНОЙ ПОДВЕСКИ, ЕСЛИ ЕЕ ОТРЕГУЛИРОВАТЬ ДО КРИТИЧЕСКОГО ЗАТУХАНИЯ, ЕЗДИТЬ БУДЕТ УДОБНЕЕ.

О, ЗДОРОВО!

Раз — и вернулось



Итак, на данный момент мы объяснили три возможных решения для случая, когда не учтена внешняя сила.



Интерпретация явления движения груза, прикрепленного к пружине, с добавлением воздействия силы сопротивления



Да.

5. ИТОГИ. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

 До сих пор мы рассматривали способы решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, на примере движения груза, прикрепленного к пружине. Подведем итоги. Чтобы решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0, \quad \leftarrow \text{Однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами} \quad (5.27)$$

предполагаем такое решение:

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad \leftarrow \text{Допустимое решение} \quad (5.28)$$

где λ – это константа.

Допустимое решение (5.28) подставляем в дифференциальное уравнение (5.27):

$$a \frac{d^2}{dx^2} e^{\lambda x} + b \frac{d}{dx} e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = 0.$$

Дифференцируем:

$$a \lambda^2 e^{\lambda x} + b \lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = 0.$$

Выносим $e^{\lambda x}$ за скобки:

$$(a \lambda^2 + b \lambda + c) e^{\lambda x} = 0. \quad (5.29)$$

Как мы видели раньше, экспоненциальная функция $e^{\lambda x}$ при любом значении x не может быть равной нулю, а значит, чтобы выполнялось равенство (5.29), должно выполняться это равенство:

$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0. \quad (5.30)$$

Это квадратное уравнение относительно λ , а значит, его решения:

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Другими словами, у алгебраического уравнения (5.30) есть два решения, а значит, и у дифференциального уравнения (5.27) тоже два решения:

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad \leftarrow \text{Решения однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами}$$

Таким образом, так как решения алгебраического уравнения обеспечивают решения дифференциального уравнения, это алгебраическое уравнение (5.30) называется **характеристическим уравнением**. Если знаем решение характеристического уравнения, значит, можем найти и решение дифференциального. А так как квадратное уравнение всегда можно решить, то и однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами можно решить.



Решения характеристического уравнения (5.30) можно разделить на части в зависимости от знака подкоренного выражения (дискриминанта $b^2 - 4ac$). В случае когда $b^2 > 4ac$, решением являются два действительных числа, в случае когда $b^2 = 4ac$, получаем одно важное решение, если же $b^2 < 4ac$, решением будут два сопряженных комплексных числа. Рассмотрим каждый случай по отдельности. Когда $b^2 > 4ac$, решением характеристического уравнения (5.30) являются два действительных числа:

$$\lambda_1 = \frac{-b + \gamma}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{-b - \gamma}{2a}, \quad \gamma = \sqrt{b^2 - 4ac},$$

поэтому общим решением дифференциального уравнения (5.27), где α и β – произвольные постоянные, будет вот это:

$$y(x) = \alpha e^{-\frac{b}{2a}x + \frac{\gamma}{2a}x} + \beta e^{-\frac{b}{2a}x - \frac{\gamma}{2a}x}.$$

Когда $b^2 = 4ac$, решением характеристического уравнения (5.30) будет вот это:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a},$$

поэтому общим решением дифференциального уравнения (5.27), где α и β – произвольные постоянные, будет вот это:

$$y(x) = (\alpha + \beta x) e^{-\frac{b}{2a}x}.$$

Когда $b^2 < 4ac$, решением характеристического уравнения (5.30) являются два сопряженных комплексных числа:

$$\lambda_1 = \frac{-b + i\Gamma}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{-b - i\Gamma}{2a}, \quad \Gamma = \sqrt{4ac - b^2},$$

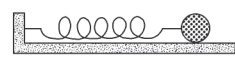
поэтому общим решением дифференциального уравнения (5.27), где α и β – произвольные постоянные, будет вот это:

$$y(x) = \alpha e^{-\frac{b}{2a}x + i\frac{\Gamma}{2a}x} + \beta e^{-\frac{b}{2a}x - i\frac{\Gamma}{2a}x}.$$

6. ВОЗВРАЩЕНИЕ К МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ 1 С УЧЕТОМ ВНЕШНИХ СИЛ

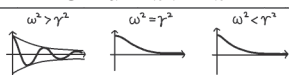
Решение с учетом воздействия внешней силы

Движение груза, прикрепленного к пружине



ТАК, А ТЕПЕРЬ ПОДУМАЕМ О ВНЕШНЕЙ СИЛЕ.

Описание явления



Описание явления



Реальный мир

Добавляем внешнюю силу

Модель

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

Добавляем силу сопротивления

Модель

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

Вычисления

Модель

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Вычисления

Мир математики

Решение

$$\begin{aligned} \omega^2 > \gamma^2: x(t) &= \alpha e^{-\gamma t} \cos \Omega t + \beta e^{-\gamma t} \sin \Omega t, \quad \Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \\ \omega^2 = \gamma^2: x(t) &= (\alpha + \beta t) e^{-\gamma t} \\ \omega^2 < \gamma^2: x(t) &= \alpha e^{-\gamma t} \cos \Gamma t + \beta e^{-\gamma t} \sin \Gamma t, \quad \Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

Интерпретация

Решение

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

Интерпретация

Если не учитывать сопротивление и внешнюю силу

НАКОНЕЦ, СМОЖЕМ РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ, КОТОРОЕ У НАС ПОЛУЧИЛОСЬ В САМОМ НАЧАЛЕ, ДА?

Уравнение движения пружины

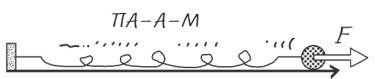
$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

ТОЧНО. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПРУЖИНЫ С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ СИЛЫ УПРУГОСТИ, СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ И ВНЕШНЕЙ СИЛЫ БЫЛО ВОТ ТАКИМ.

ОБОЗНАЧИМ ВНЕШНЮЮ СИЛУ КАК $F(t)$ И ПРЕДПОЛОЖИМ, ДЛЯ ПРИМЕРА, ЧТО ОНА ПОСТОЯННАЯ.

ТАК И ЕСТЬ.

ТОГДА ПРУЖИНА, РАСТЯГИВАЯСЬ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ДЕЙСТВИЯ СИЛЫ, ЧЕРЕЗ КАКОЕ-ТО ВРЕМЯ ОСТАНАВЛИВАЕТСЯ.



НО ЭТО НЕ ИНТЕРЕСНЫЙ ПРИМЕР, ПОЭТОМУ ПРЕДПОЛОЖИМ, ЧТО ИЗ-ЗА СОПРОТИВЛЕНИЯ МЫ ИМЕЕМ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ,

А ВНЕШНЯЯ СИЛА - ПЕРИОДИЧЕСКАЯ.

$$F(t) = F_0 \cos \nu t$$

И РАССМОТРИМ ЭТУ СИТУАЦИЮ.



В уравнении движения пружины с учетом воздействия силы упругости, силы сопротивления и внешней силы разделим обе части на m и вот что получим:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0 \cos vt}{m}.$$



Это тоже линейное дифференциальное уравнение второго порядка.



Так же как в формуле (5.1), сделаем замену:

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

и снова так же, как на стр. 172:

$$\frac{c}{m} = 2\gamma,$$

заменяем:

$$\frac{F_0}{m} = f,$$

и дифференциальное уравнение (5.31) можно переписать вот так:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f \cos vt. \quad (5.32)$$

Это неоднородное дифференциальное уравнение. Попробуем его решить.



Так как это дифференциальное уравнение неоднородное, используем метод, описанный в главе 4. Однородное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (5.32), согласно стр. 172, будет таким:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0.$$

А значит, допустимым решением неоднородного уравнения (5.32), исходя из решения однородного уравнения при $\omega^2 > \gamma^2$ на стр. 180, будет:

$$x(t) = A \cos vt + B \sin vt. \quad \leftarrow \text{Допустимое решение} \quad (5.33)$$

Определим константы A и B , удовлетворяющие дифференциальному уравнению (5.32).



После дифференцирования по t допустимого решения (5.11) получили:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= A \frac{d}{dt} \cos vt + B \frac{d}{dt} \sin vt; \\ &= -Av \sin vt + Bv \cos vt. \\ \frac{d^2 x(t)}{dt^2} &= -Av \frac{d}{dt} \sin vt + Bv \frac{d}{dt} \cos vt; \\ &= -Av^2 \cos vt - Bv^2 \sin vt.\end{aligned}$$

Следовательно, если подставить полученные результаты в дифференциальное уравнение (5.32), получим вот что:

$$\{-Av^2 \cos vt - Bv^2 \sin vt\} + 2\gamma\{-Av \sin vt - Bv \cos vt\} + \omega^2(A \cos vt - B \sin vt) = f \cos vt.$$

Перегруппируем и получим:

$$\{(\omega^2 - v^2)A + 2\gamma v B\} \cos vt + \{2\gamma v A + (\omega^2 - v^2)B\} \sin vt = f \cos vt.$$

Чтобы выполнялось равенство, должны соблюдаться эти условия:

$$\begin{cases} (\omega^2 - v^2)A + 2\gamma v B = f \\ -2\gamma v A + (\omega^2 - v^2)B = 0 \end{cases}.$$

Решив эту систему уравнений, получим константы A и B :

$$A = \frac{\omega^2 - v^2}{(\omega^2 - v^2)^2 + (2\gamma v)^2} f, \quad B = \frac{2\gamma v}{(\omega^2 - v^2)^2 + (2\gamma v)^2} f.$$

Следовательно, исходя из допустимого решения (5.33), частным решением уравнения (5.32) будет:

$$x(t) = \frac{\omega^2 - v^2}{(\omega^2 - v^2)^2 + (2\gamma v)^2} f \cos vt + \frac{2\gamma v}{(\omega^2 - v^2)^2 + (2\gamma v)^2} f \sin vt. \quad (5.34)$$

А значит, общее решение дифференциального уравнения (5.32) будет равно сумме общего решения (5.16) однородного уравнения $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$:

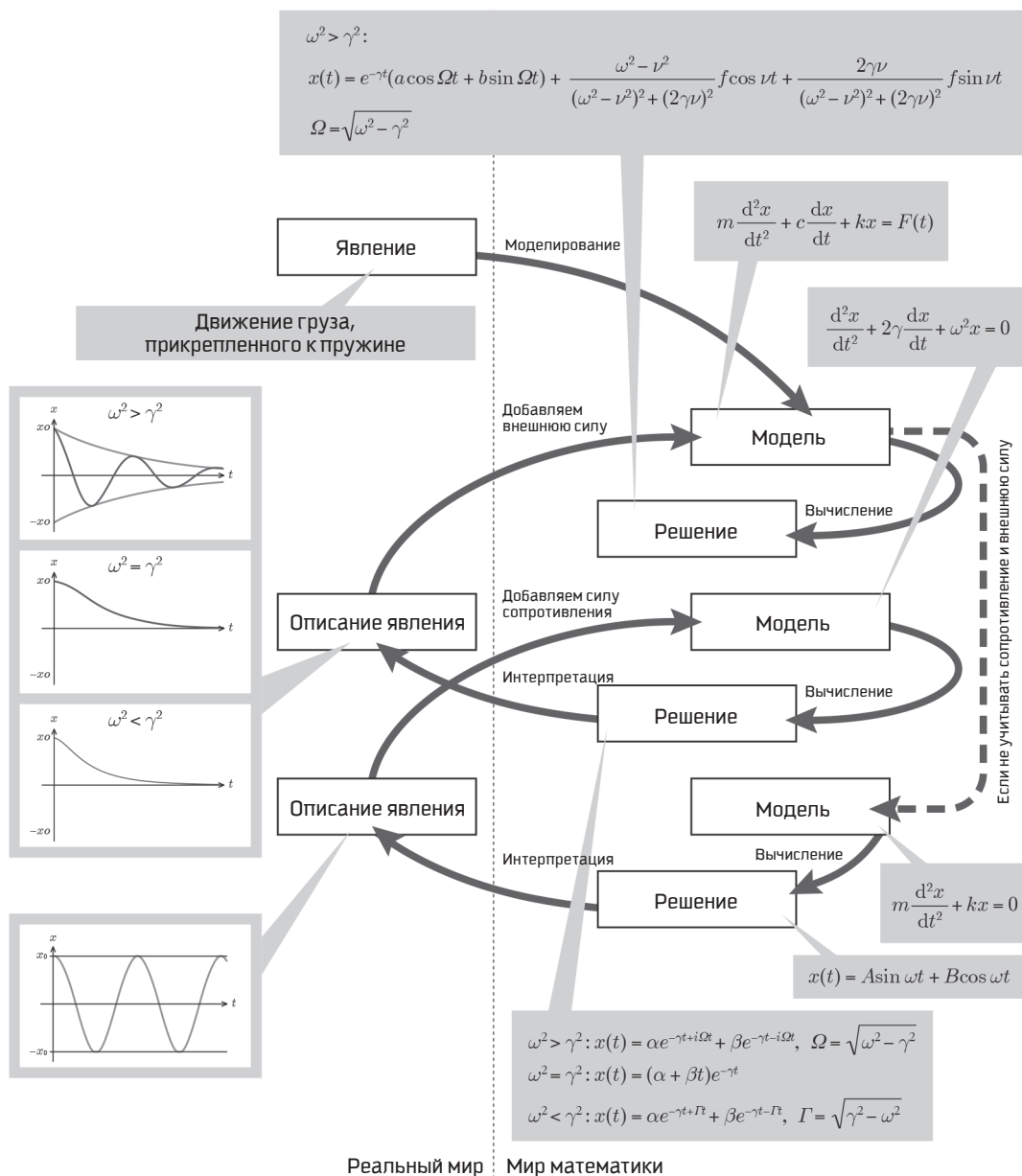
$$x(t) = e^{-\gamma t}(a \cos \Omega t + b \sin \Omega t), \quad \Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

и частного решения (5.34) неоднородного уравнения (5.32). Вот что получится в итоге:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\gamma t}(a \cos \Omega t + b \sin \Omega t) \\ &+ \frac{\omega^2 - v^2}{(\omega^2 - v^2)^2 + (2\gamma v)^2} f \cos vt + \frac{2\gamma v}{(\omega^2 - v^2)^2 + (2\gamma v)^2} f \sin vt.\end{aligned} \quad (5.35)$$



Наконец, получили общее решение!



Решение для модели явления движения груза, прикрепленного к пружине, с добавлением воздействия внешней силы



Ага.

■ Интерпретация решения с учетом внешней силы



Рассмотрим ситуацию, когда груз стоит в исходной точке, а угловая частота возмущающей на него периодической внешней силы равна собственной угловой частоте. Начальное состояние будет $t = 0$, $x(0) = x_0$, $[dx/dt]_{t=0} = 0$, и раз угловая частота внешней силы равна собственной угловой частоте, значит, $\nu = \omega$. Прежде всего подставим $\nu = \omega$ в общее решение (5.35):

$$x(t) = e^{-\gamma t} (a \cos \Omega t + b \sin \Omega t) + \frac{f}{2\gamma\omega} \sin \omega t. \quad (5.36)$$

Теперь применим условие начального состояния $x(0) = x_0$:

$$x(0) = e^{-\gamma \cdot 0} \{a \cos(\Omega \cdot 0) + b \sin(\Omega \cdot 0)\} + \frac{f}{2\gamma\omega} \sin(\omega \cdot 0) = a = 0. \quad (5.37)$$

Продифференцируем решение (5.36) по t :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\gamma e^{-\gamma t} (a \cos \Omega t + b \sin \Omega t) + e^{-\gamma t} (-a \Omega \sin \Omega t + b \Omega \cos \Omega t) + \frac{f}{2\gamma} \cos \omega t; \\ &= e^{-\gamma t} \{(-\gamma a + b \Omega) \cos \Omega t - (\gamma b + a \Omega) \sin \Omega t\} + \frac{f}{2\gamma} \cos \omega t. \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dx}{dt} \right]_{t=0} &= e^{-\gamma \cdot 0} \{(-\gamma a + b \Omega) \cos(\Omega \cdot 0) - (\gamma b + a \Omega) \sin(\Omega \cdot 0)\} + \frac{f}{2\gamma} \cos(\omega \cdot 0); \\ &= -\gamma a + b \Omega + \frac{f}{2\gamma} = 0. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Исходя из формул (5.37) и (5.38), получаем:

$$\begin{cases} a = 0 \\ -\gamma a + b \Omega + \frac{f}{2\gamma} = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{f}{2\gamma\Omega} \end{cases}. \quad (5.39)$$

Подставим полученное решение (5.39) в общее решение (5.36):

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(-\frac{f}{2\gamma\Omega} \sin \Omega t \right) + \frac{f}{2\gamma\omega} \sin \omega t.$$

Чтобы упростить решение, предположим, что $\gamma \ll \omega$, тогда $\Omega \sim \omega$, а значит, решение можно записать так:

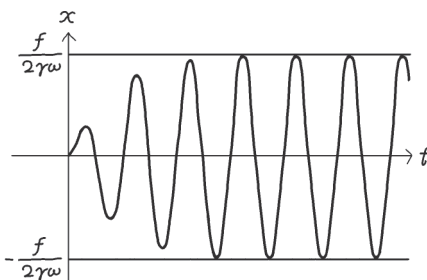
$$x(t) = \frac{f}{2\gamma\omega} (1 - e^{-\gamma t}) \sin \omega t.$$



О-о-о!

А ВОТ КАК ЭТО
БУДЕТ ВЫГЛЯДЕТЬ
НА ГРАФИКЕ.

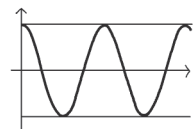
Решение для случая,
когда внешняя сила периодическая
(вынужденные колебания)



АМПЛИТУДА
КОЛЕБАНИЙ
ПОСТЕПЕННО
УВЕЛИЧИВАЕТСЯ.

ТАК И ЕСТЬ. ПОСТЕПЕННО
КОЛЕБАНИЯ СТАНОВЯТСЯ
ПОХОЖИМИ НА ПРОСТЫЕ
КОЛЕБАНИЯ С ПОСТОЯННОЙ
АМПЛИТУДОЙ.

Простые колебания



В самом деле
похоже

И правда

ТАКИЕ КОЛЕБАНИЯ...

Вынужденные
колебания

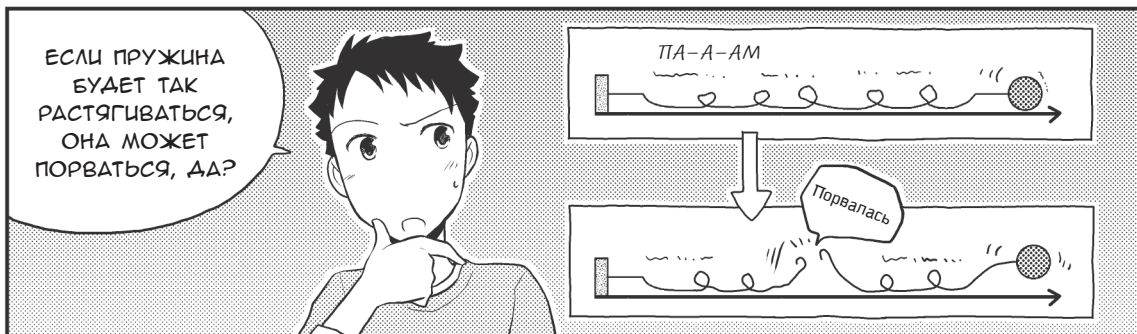
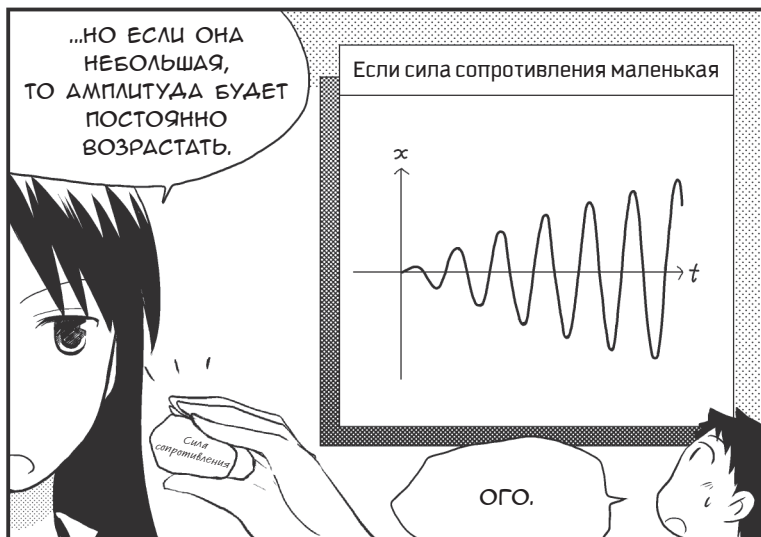
...НАЗЫВАЮТСЯ
ВЫНУЖАЕМЫМИ.

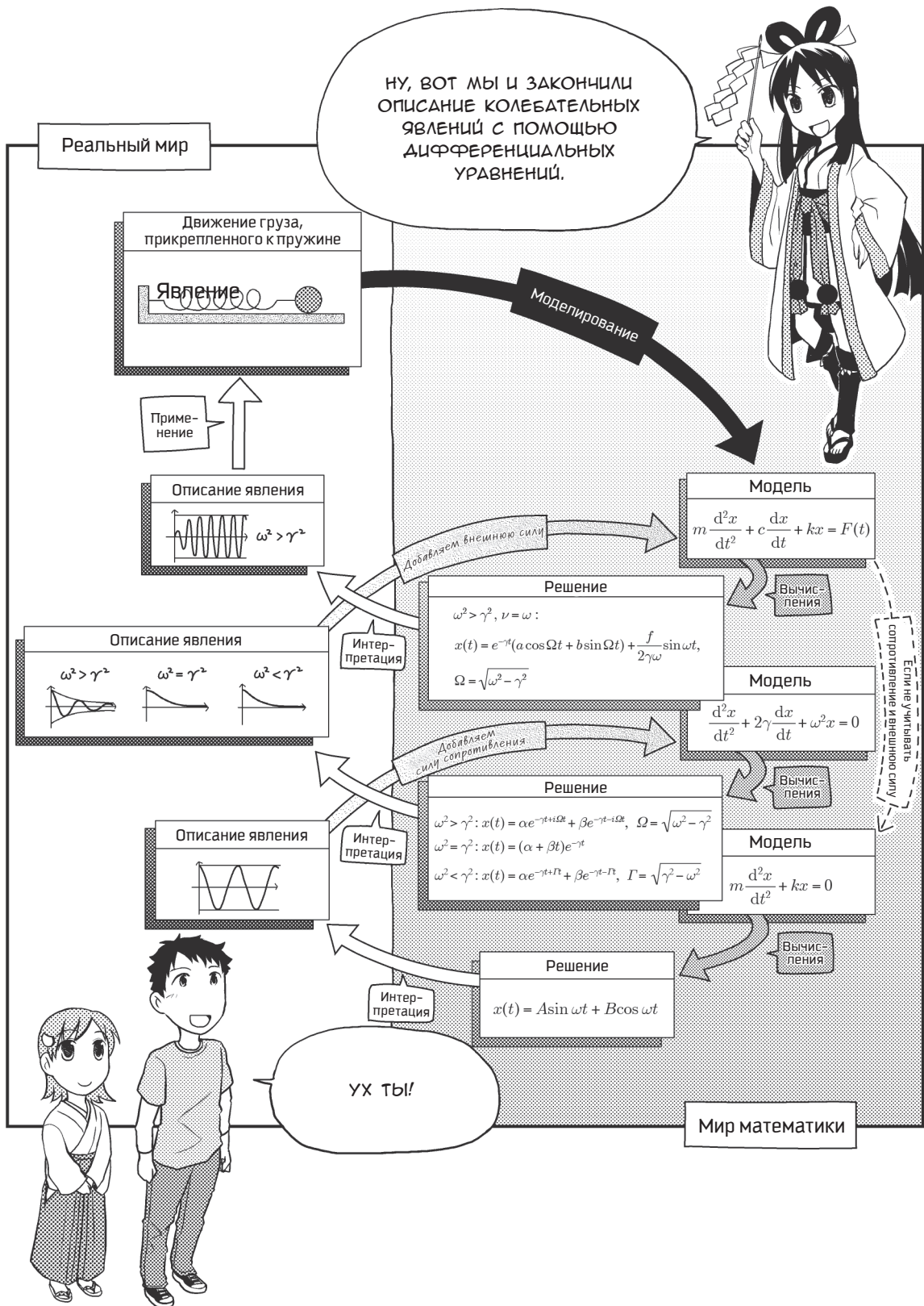
КСТАТИ, ЕСЛИ УГЛОВАЯ ЧАСТОТА
ВНЕШНЕЙ СИЛЫ РАВНА СОБСТВЕННОЙ
УГЛОВОЙ ЧАСТОТЕ КОЛЕБАНИЙ,
ТО АМПЛИТУДА УВЕЛИЧИТСЯ!

$$\nu = \omega$$

ПОНЯТНО.

ТАКОЕ ЯВЛЕНИЕ
НАЗЫВАЕТСЯ РЕЗОНАНС.







НУ КАК?
РАЗОБРАЛСЯ
С ДИФФЕРЕН-
ЦИАЛЬНЫМИ
УРАВНЕНИЯМИ?

ДА!

У МЕНЯ
ТАКОЕ ЧУВСТВО,
ЧТО ПОСТЕПЕННО,
ПРОХОДЯ ЦИКЛ ЗА ЦИКЛОМ,
Я ПРИБЛИЗИЛСЯ
К ПОНИМАНИЮ.



ЭТО, НАВЕРНОЕ,
ПОТОМУ, ЧТО ВЫ,
ГОСПОЖА БОГИНЯ,
ПРИВОДИЛИ ОЧЕНЬ
ПОНЯТНЫЕ ПРИМЕРЫ!

ПОТОМУ ЧТО ИНАЧЕ
ТЫ НИЧЕГОШЕНЬКИ
НЕ ПОНИМАЛ!

Деваться было
некогда!

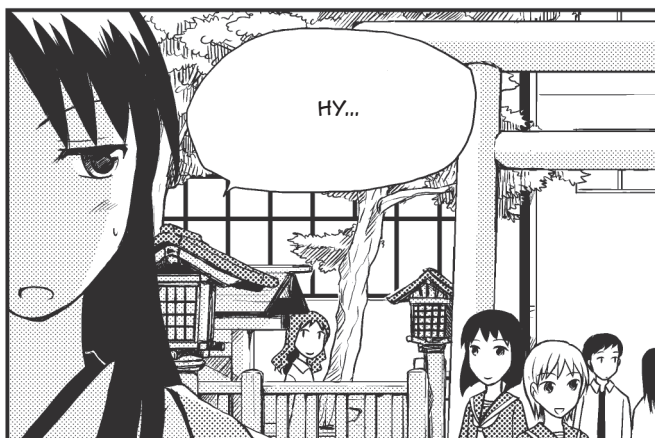
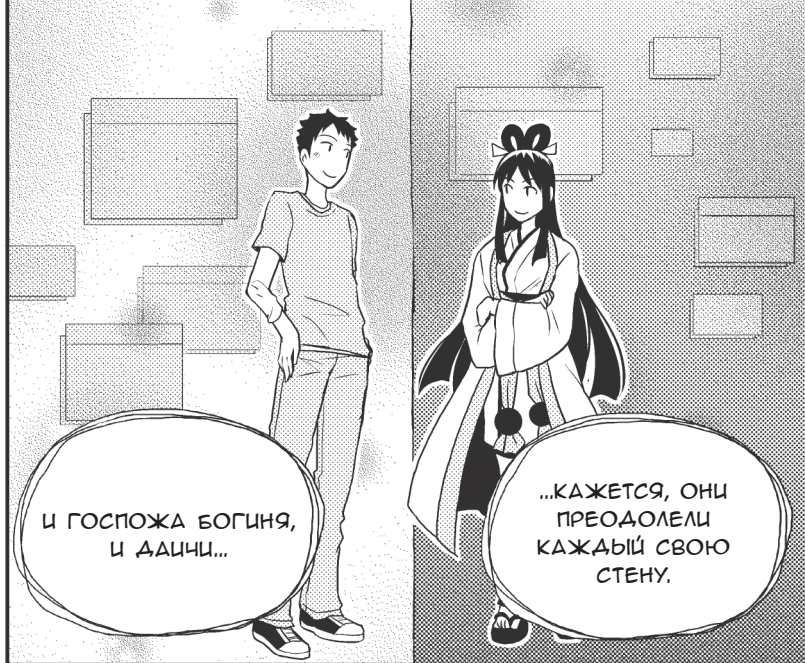


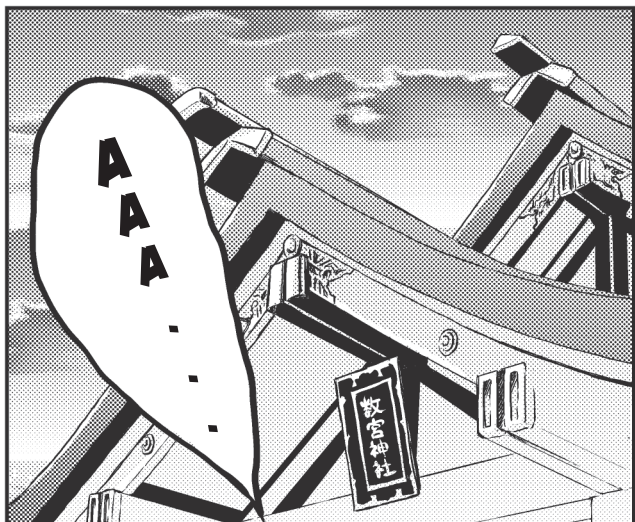
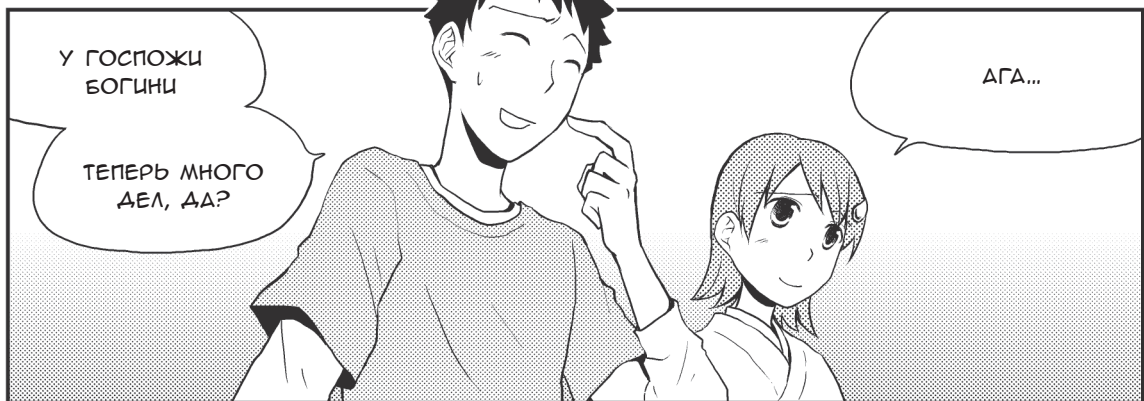
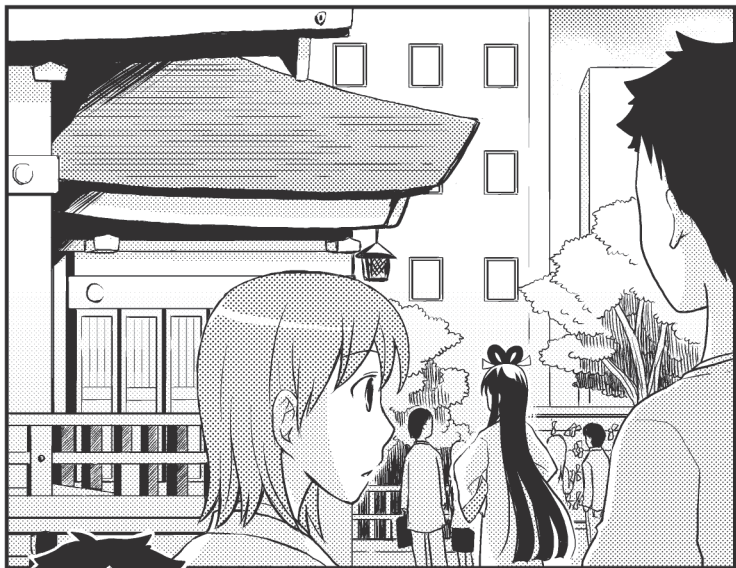
ОДНАКО...

...Я ТОЖЕ ПОНЯЛА
ОДНУ ВЕЩЬ. ЧТО ВАЖНО
ОБЪЯСНЯТЬ ТАК, ЧТОБЫ
МОЖНО БЫЛО ЛЕГКО
ПОНЯТЬ.

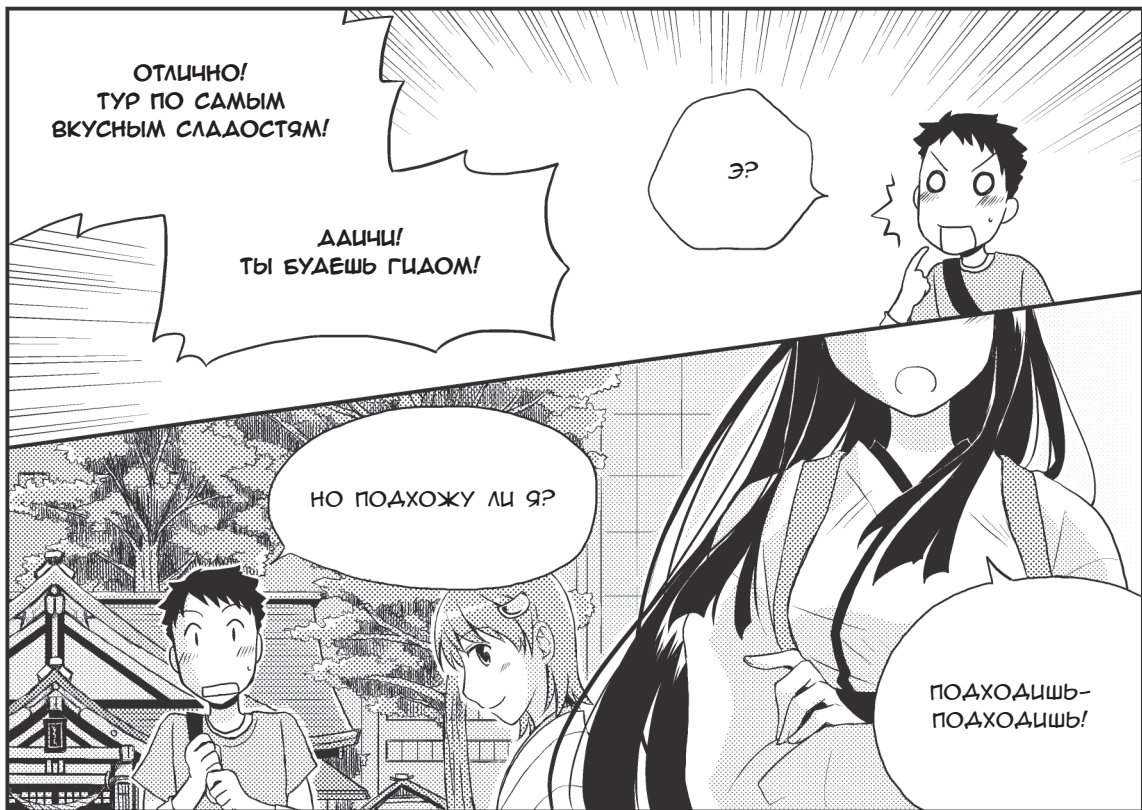
СПАСИБО!

НУ, ЧТО ВЫ...













ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ОХЛАЖДЕНИЕ КОФЕ

С недавних пор появилось много разных видов кофе, что, конечно, прекрасно для тех, кто его любит. Если выпить кофе хочется побыстрее, то по всей Японии можно купить баночный кофе в торговом автомате.

Однако баночный кофе быстро остывает, не так ли. Возможно, поэтому, когда только достнешь его из автомата, кофе иногда такой горячий, что его невозможно держать в руках. И если его сразу выпить, то можно обжечься. Так когда же наступает момент, когда кофе готов к употреблению?

Процесс понижения температуры кофе тоже можно смоделировать в виде дифференциального уравнения. Если имеется кофе, температура которого выше температуры окружающей среды, то кофе начнет остывать. Понятно, что изменение температуры кофе относительно времени будет пропорционально разнице между температурой кофе и температурой окружающей среды¹. Обозначим время за t , температуру кофе за $T(t)$, температуру окружающей среды за T_e , а коэффициент пропорциональности через k , тогда получается:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_e). \quad \leftarrow \text{Дифференциальное уравнение, описывающее изменение температуры кофе относительно времени}$$

Это называется **закон охлаждения Ньютона**².

Попробуем решить. Прежде всего найдем переменные:

Зависимая переменная

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_e).$$

Независимая переменная

Хотя тут присутствует лишний элемент, но все же можно применить метод разделения переменных. Разделим обе части на $T - T_e$:

$$\frac{1}{T - T_e} \frac{dT}{dt} = -k.$$

Проинтегрируем обе части:

$$\int \frac{1}{T - T_e} dT = -k \int dt.$$

¹ В этом можно легко убедиться, достаточно только иметь термометр, часы и бумагу для графика.

² На самом деле в законе идет речь не об изменении температуры, а об изменении количества тепла, но если теплоемкость объекта не меняется, то результат будет одинаковым.

Итак, у нас получилось разделить переменные, то есть собрать слева переменные T , а справа переменную t .

$$\int \frac{1}{T - T_e} dT = -k \int dt.$$

Решим интегралы в обеих частях по отдельности:

$$\int \frac{1}{T - T_e} dT = \ln|T - T_e| + C;$$

$$-k \int dt = -kt + C.$$

Объединим интегральные постоянные:

$$\ln|T - T_e| = -kt + C.$$

Получили функцию температуры в зависимости от времени $T(t)$:

$$T(t) - T_e = e^{-kt+C}, \quad \leftarrow \text{Решение дифференциального уравнения}$$

то есть решили дифференциальное уравнение.

Теперь найдем интегральную константу. В момент времени $t = 0$ температура кофе будет равна $T(0) = T_0 (> T_e)^3$. Это будет начальным состоянием, поэтому:

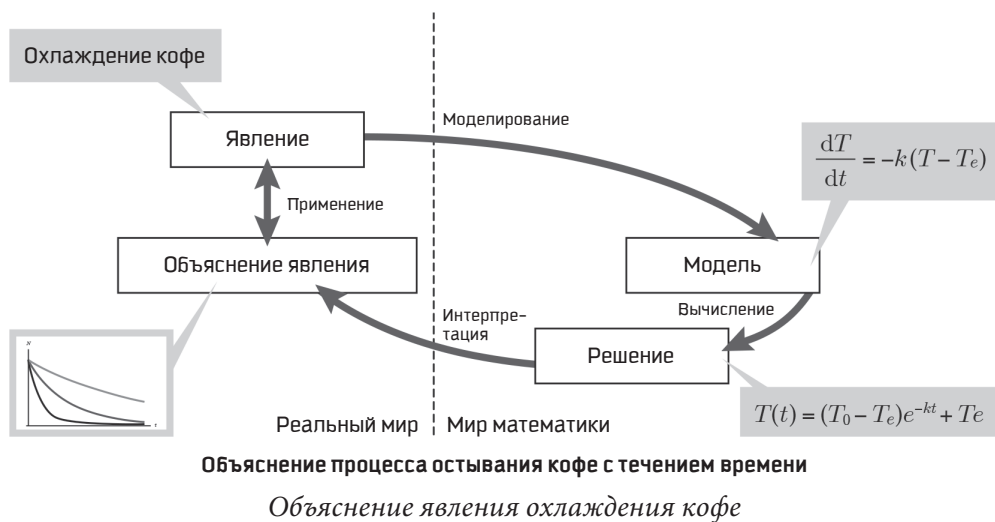
$$T(0) - T_e = e^C.$$

Следовательно:

$$T_0 - T_e = e^C.$$

Значит, функцию температуры кофе можно записать вот так:

$$T(t) = (T_0 - T_e)e^{-kt} + T_e.$$



³ Потому что мы рассматриваем ситуацию, когда кофе горячий, а не холодный.

График этой функции будет выглядеть так же, как график функции радиоактивного распада, сдвинутый вверх⁴. Чем выше значение параметра k , тем быстрее будет остывать кофе.

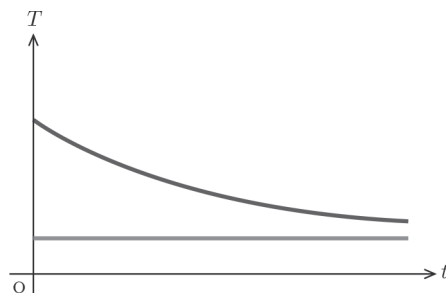


График похож на график функции радиоактивного распада, сдвинутый вверх

*График изменения температуры кофе T
в зависимости от времени t*

Другими словами, если из торгового автомата выпал слишком горячий кофе, то, быстро замерив изменение его температуры и вычислив параметр k , можно спрогнозировать, когда наступит благоприятное время для того, чтобы его выпить. Но, получив прогноз, нельзя дуть на кофе, потому что в этом случае параметр k изменится, и прогноз будет отличаться от реальности.

⁴ Со временем уже с первого взгляда на дифференциальное уравнение становится понятно, как будет выглядеть его график. Это только дело практики.

2. ПОЛЕТ РАКЕТЫ

На острове Хоккайдо в регионе Токати в расположенном на тихоокеанском побережье городе Тайки в рамках программы «Создание космического города» проводятся эксперименты по запуску гибридных ракет⁵ на акриловом и парафиновом топливе. Ракета получает возможность двигаться вперед благодаря отбросу части собственной массы. Большинство ракет летит за счет выброса горячих газов, которые образуются вследствие химической реакции между топливом и окислителем⁶. Так как не может быть отброшена вся масса ракеты⁷, то скорость, с которой ракета может приземлиться, будет иметь верхний предел. Этот предел называется конечной скоростью. Попробуем ее рассчитать.

Обозначим время за t , скорость ракеты за $V(t)$, массу ракеты за M , скорость выбрасываемых ракетным двигателем газов через v . Тогда можем составить дифференциальное уравнение:

$$\frac{dV}{dM} = -\frac{v}{M}. \quad \leftarrow \text{Дифференциальное уравнение, описывающее скорость ракеты}$$

Можно применить метод разделения переменных. Обозначим массу ракеты до отброса ее части через M_i , а массу, оставшуюся после отброса части, через M_f , тогда:

$$V = v \ln \left(\frac{M_i}{M_f} \right). \quad \leftarrow \text{Решение дифференциального уравнения}$$

Это уравнение называется формулой Циолковского. Используя ее, можно рассчитать конечную скорость ракеты. Например, если скорость выбрасываемых ракетным двигателем газов $v = 1500$ м/с, начальная масса ракеты $M_i = 10$ кг, а конечная масса ракеты $M_f = 9$ кг, то для такой маленькой ракеты конечная скорость будет $V = 158$ м/с.

⁵ Ракета, в которой в качестве горючего и окислителя используются и твердые вещества, и жидкости.

⁶ Существуют также электрические двигатели, например ионные.

⁷ Ракета подобна грузовику, перевозящему багаж, поэтому даже если выбросить из ракеты все содержимое, останется само тело ракеты.

3. ИНТЕНСИВНОСТЬ ОЩУЩЕНИЯ

Среди реакций нашего тела тоже есть такие, которые можно описать с помощью дифференциальных уравнений, решаемых методом разделения переменных. Например, закрывая глаза, мы ощущаем вес в 10 г. Однако если увеличить этот вес в 2 раза (до 20 г), то он не будет нами так ощущаться. Чтобы появилось ощущение, что вес увеличился в 2 раза, необходимо, чтобы этот вес был равен 100 г. Наши ощущения изменяются логарифмически. И это касается не только чувства веса, но и, например, громкости звука. Это называется **закон Фехнера**.

Обозначим физическую интенсивность явления через I , а интенсивность ощущения через $E(I)$, тогда если k – это константа, то можно составить дифференциальное уравнение:

$$\frac{dE}{dI} = \frac{k}{I}. \quad \leftarrow \text{Дифференциальное уравнение, описывающее интенсивность ощущений}$$

Решим его:

$$E = k \ln \left(\frac{I}{I_0} \right). \quad \leftarrow \text{Решение дифференциального уравнения}$$

Считаем, что реакция на минимальный ощутимый раздражитель равна нулю.

$$E(I_0) = 0.$$

Параметры k и I_0 для каждого ощущения различные у каждого человека⁸.

⁸ Бывают очень чувствительные люди, а бывают и нечувствительные.

4. ЭФФЕКТИВНОСТЬ РЕКЛАМЫ

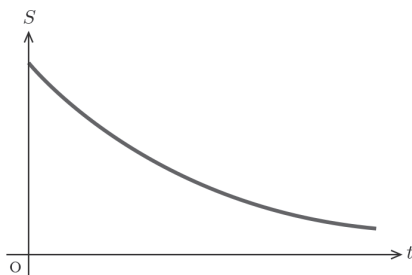
Метод вариации произвольных постоянных, при котором мы сначала находим решение для более простой задачи, а затем корректируем его так, чтобы оно удовлетворяло условиям исходного уравнения, применяется не только для описания природных, но и для социальных явлений тоже.

Мир переполнен различной рекламой. Почему же ее так много? Потому что, если не рекламировать продукт, упадут его продажи, не так ли⁹? На самом деле если продукт совсем не продвигать, то продажи будут уменьшаться экспоненциально¹⁰. Попробуем смоделировать это в виде дифференциального уравнения.

По результатам исследований, изменение скорости продаж S (количество продаж на единицу времени) относительно времени t можно описать такой экспоненциальной функцией:

$$S(t) = e^{-\lambda t + \mu}, \quad (\text{A.1})$$

где λ и μ – константы. Конечно, что касается каждого человека по отдельности, то мы можем только определить вероятность, с какой он купит продукт. Эта же функция описывает поведение большой группы людей. Формула (A.1) показывает, как меняется скорость продаж при отсутствии рекламы.



Изменение скорости продаж относительно времени при отсутствии рекламы

А для такой функции мы уже знаем дифференциальное уравнение, которое можно решить методом разделения переменных. В соответствии с главой о методе разделения переменных дифференциальное уравнение будет таким¹¹:

$$\frac{dS}{dt} = -\lambda S.$$

⁹ Либо просто из опасения, что продажи упадут.

¹⁰ David N. Burghes. Modelling with differential equations. С. 76.

¹¹ Те, кто сомневается, могут подставить функцию S и убедиться.

Это и будет дифференциальное уравнение, описывающее скорость продаж при отсутствии рекламы.

А что же будет, если задействуется реклама? В этом случае появятся люди, которые купят продукт после просмотра рекламы¹². То есть среди людей, увидевших рекламу, появится определенный процент тех, кто купит продукт, а значит, скорость продаж возрастет пропорционально проценту людей, увидевших рекламу $A(t)$. Однако если вы думаете, что с помощью рекламы можно продавать любое количество продукта, то это не так. Количество людей, имеющих возможность приобрести товар, ограничено, а значит, скорость продаж в конце концов достигнет своего предела и станет постоянной¹³. Таким образом, если M – это предельная скорость продаж (уровень насыщения), то когда реальная скорость продаж S начинает приближаться к предельной скорости M , скорость продаж S должна замедляться. Другими словами, получается, что скорость продаж S должна быть пропорциональна разнице между предельной скоростью продаж M и скоростью продаж S (запас роста скорости продаж $M - S$). Будем считать, что отношение запаса роста скорости продаж $(M - S)$ к предельной скорости M выражает темп роста скорости продаж. Итак, изменение скорости роста продаж из-за рекламы можно записать как:

$$\gamma A \cdot \frac{M - S}{M},$$

где γ – это константа. Получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dS}{dt} = -\lambda S + \gamma A \cdot \frac{M - S}{M}.$$

Преобразуем немного правую часть:

$$-\lambda S + \gamma A \cdot \frac{M - S}{M} = -\lambda S + \gamma A - \gamma \frac{AS}{M} = -\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right)S + \gamma A,$$

и получаем уравнение, которое является неоднородным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dS}{dt} = -\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right)S + \gamma A. \quad \leftarrow \text{Неоднородное дифференциальное уравнение, которое нас изначально интересует} \quad (\text{A.2})$$

Попробуем его решить методом вариации произвольных постоянных.

Однородное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (A.2):

$$\frac{dS}{dt} = -\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right)S. \quad \leftarrow \text{Однородное уравнение} \quad (\text{A.3})$$

¹² Хотя дело не ограничивается только покупками людей, посмотревших рекламу, но здесь мы говорим именно об эффективности рекламы.

¹³ Понятно, что продавцы товара хотят расширить рынок. Но сколько не расширяй, количество людей на планете все равно ограничено.

Прежде всего решим его методом разделения переменных:

$$\int \frac{dS}{S} = -\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) \int dt.$$

Проинтегрируем обе части:

$$\ln|S| = -\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right)t + C.$$

Получаем решение:

$$S = \pm e^{-\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right)t + C}.$$

Обозначим через c постоянную $\pm e^C$:

$$S = ce^{-\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right)t}. \quad \leftarrow \text{Общее решение однородного уравнения} \quad (\text{A.4})$$

Получаем общее решение однородного уравнения (A.3).

Теперь подкорректируем полученное общее решение однородного уравнения (A.4) так, чтобы оно подходило для неоднородного уравнения (A.2). Заменим константу c на функцию от времени $c(t)$:

$$S(t) = c(t)e^{-\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right)t}. \quad \leftarrow \text{Допустимое решение неоднородного дифференциального уравнения}$$

Получаем допустимое решение дифференциального уравнения (A.2). Подставим его и продифференцируем:

$$\frac{dc(t)}{dt} e^{-\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right)t} + c(t) \left(-\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) e^{-\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right)t} \right) = -\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) c(t) e^{-\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right)t} + \gamma A.$$

Преобразуем и получим:

$$\frac{dc(t)}{dt} = \gamma A e^{\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right)t}.$$

Сделаем замену $\alpha = \lambda + \gamma(A/M)$ и проинтегрируем:

$$c(t) = \gamma A \int e^{\alpha t} dt = \gamma A \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} + c'.$$

Получаем общее решение:

$$S(t) = \left(\gamma A \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} + c' \right) e^{-\alpha t} = \frac{\gamma A}{\alpha} + c' e^{-\alpha t}. \quad \leftarrow \text{Общее решение неоднородного уравнения} \quad (\text{A.5})$$

Чтобы понять, как это решение описывает эффективность рекламы, определим конкретные условия. Разумно предположить, что даже когда нет рекламы, люди в каком-то объеме покупают продукт. Поэтому обозначим момент времени запуска рекламы за $t = 0$, скорость продаж S в этот момент полагаем равной $S(0) = S_0$. Кроме того, полагаем, что фиксированная реклама осуществляется на промежутке времени $0 < t < T$, и процент людей, смотрящих рекламу, тоже фиксирован.

$$A(t) = A \quad (0 < t < T).$$

Подставим начальное состояние $S(0) = S_0$ в решение (A.5):

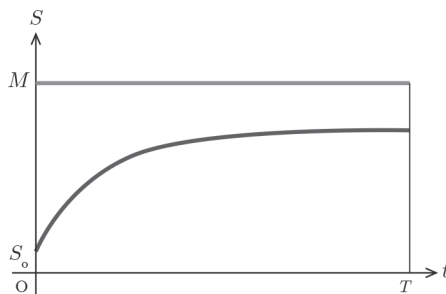
$$S(0) = S_0 = \frac{\gamma A}{\alpha} + c' e^{-\alpha \cdot 0};$$

$$\therefore c' = S_0 - \frac{\gamma A}{\alpha}.$$

Значит, в период времени $0 < t < T$ скорость продаж будет:

$$S(t) = \frac{\gamma A}{\alpha} + \left(S_0 - \frac{\gamma A}{\alpha} \right) e^{-\alpha t}. \quad \leftarrow \text{Скорость продаж в период времени } 0 < t < T \quad (\text{A.6})$$

Получается, что с началом рекламы скорость продаж растет очень быстро, затем начинает замедляться и в конце концов приближается к определенному значению.



*Изменение скорости продаж
при воздействии рекламы*

А что будет, когда реклама прекратится? Предположим, что реклама останавливается в момент времени $t = T$, тогда при $t > T$ будет $A = 0$, а дифференциальное уравнение (A.5) станет:

$$\frac{dS}{dt} = -\lambda S.$$

Общее решение, идентично с уравнением (A.1), будет:

$$S(t) = c e^{-\lambda t}.$$

Однако на этот раз благодаря рекламе скорость продаж возросла, поэтому она начинает снижаться со значения $S(T)$ в момент времени $t = T$. Если в уравнение (А.6) подставить значение $t = T$, получим:

$$S(T) = \frac{\gamma A}{\alpha} + \left(S_0 - \frac{\gamma A}{\alpha} \right) e^{-\alpha T}.$$

Следовательно, исходя из общего решения (А.7):

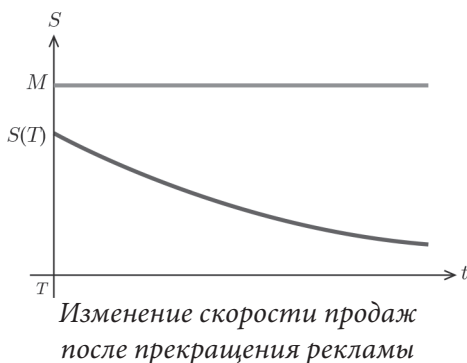
$$S(T) = c'' e^{-\lambda T} = \frac{\gamma A}{\alpha} + \left(S_0 - \frac{\gamma A}{\alpha} \right) e^{-\alpha T};$$

$$\therefore c'' = \left(\frac{\gamma A}{\alpha} + \left(S_0 - \frac{\gamma A}{\alpha} \right) e^{-\alpha T} \right) e^{\lambda T}.$$

А значит, решение будет:

$$S(t) = \left(\frac{\gamma A}{\alpha} + \left(S_0 - \frac{\gamma A}{\alpha} \right) e^{-\alpha T} \right) e^{-\lambda(t-T)}.$$

При прекращении рекламы скорость продаж будет постоянно снижаться.



На самом деле, конечно, экономика не так проста¹⁴. Но все равно это очень интересно, не так ли, что с помощью дифференциальных уравнений можно объяснить поведение людей, пусть и не по отдельности, а в составе большой группы.

¹⁴ На самом деле модель будет выглядеть намного сложнее.

5. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

В главе 3 мы рассматривали метод вариации произвольных постоянных для решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений. Но, кроме него, есть и другой способ, рассмотрим его в общих чертах.

В неоднородном уравнении

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad \leftarrow \text{Неоднородное уравнение}$$

обе части умножим на функцию $\mu(x)$:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x). \quad (\text{A.8})$$

Если бы функция $\mu(x)$ обладала таким удобным свойством:

$$\frac{d(\mu(x)y)}{dx} = \mu(x)q(x),$$

то так как в правой части только функции от x , можно было бы проинтегрировать и получить решение:

$$\mu(x)y = \int \mu(x)q(x)dx. \quad (\text{A.9})$$

Давайте посмотрим, существует ли такая удобная функция $\mu(x)$. Проинтегрируем произведение:

$$\frac{d(\mu(x)y)}{dx} = \frac{d\mu(x)}{dx}y + \mu(x)\frac{dy}{dx}.$$

Сравнив результат с дифференциальным уравнением (A.8), понимаем, что если

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)p(x), \quad \leftarrow \text{Дифференциальное уравнение, подходящее для метода разделения переменных}$$

то это будет как раз нужная нам удобная функция. Тут можно применить метод разделения переменных:

$$\int \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \int p(x)dx.$$

Решим интегралы:

$$\begin{aligned} \ln|\mu(x)| &= \int p(x)dx; \\ \therefore \mu(x) &= \pm e^{\int p(x)dx}. \end{aligned} \quad \leftarrow \text{Интегрирующий множитель}$$

Итак, мы нашли функцию, которая будет нам удобна. Такая функция называется **интегрирующим множителем**. Если интегрирующий множитель известен, то из уравнения (A.9) следует:

$$y = \frac{\int \mu(x)q(x)dx}{\mu(x)},$$

что и будет являться общим решением неоднородного уравнения.

Попробуем решить неоднородное уравнение для оценки эффективности рекламы (A.2), сделав замену $\alpha = \lambda + \gamma(A/M)$:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha S + \gamma A,$$

используя интегрирующий множитель. Интегрирующий множитель будет:

$$\mu(t) = \pm e^{\int \alpha dt} = \pm e^{\alpha t + C} = \pm e^C e^{\alpha t} = c e^{\alpha t}.$$

Из общего решения (A.10) понятно, что содержащийся в интегрирующем множителе постоянный множитель может быть любым, а значит, можем взять и постоянную $c = \pm e^C$ (содержащую интегральную переменную), равную 1. Получим интегрирующий множитель:

$$\mu(t) = e^{\alpha t}. \quad \leftarrow \text{Интегрирующий множитель}$$

Следовательно, общее решение будет:

$$S(t) = \frac{\int \mu(t)\gamma A dt}{\mu(t)} = \frac{\int e^{\alpha t}\gamma A dt}{e^{\alpha t}} = \frac{\gamma A}{\alpha} + c'e^{-\alpha t}, \quad \leftarrow \text{Общее решение неоднородного уравнения}$$

что полностью совпадает с решением (A.5). Таким образом, если возможно найти интегрирующий множитель¹⁵, то можно довольно просто решить и неоднородное дифференциальное уравнение.

¹⁵ Интегрирующий множитель нельзя получить, не интегрируя, поэтому найти его не всегда возможно.

6. СНОВА ЛОГИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

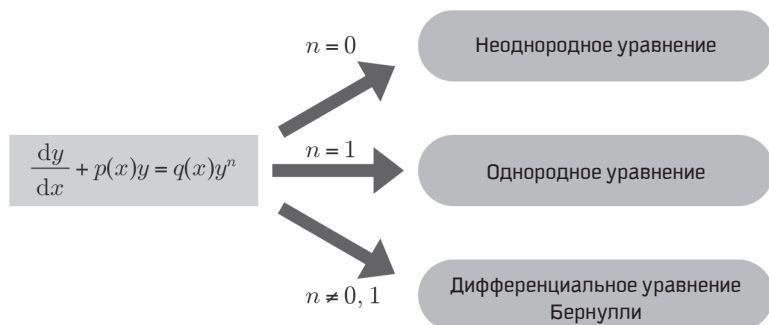
Неоднородное уравнение, которое мы рассматривали, изучая метод вариации произвольных постоянных на стр. 146:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \quad \leftarrow \text{Неоднородное уравнение (линейное дифференциальное)}$$

Если его немного изменить, то получим:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n. \quad \leftarrow \text{Дифференциальное уравнение Бернулли (нелинейное)} \quad (\text{A.11})$$

При $n = 0$ это будет неоднородное уравнение, при $n = 1$ – однородное линейное дифференциальное уравнение. В остальных случаях это будет нелинейное дифференциальное уравнение Бернулли. Уравнение Бернулли можно решить методом вариации произвольных постоянных, если сначала привести его к линейному дифференциальному уравнению с помощью замены переменных.



*Однородное уравнение, неоднородное уравнение
и дифференциальное уравнение Бернулли*

Если в дифференциальном уравнении Бернулли произвести такую замену зависимой переменной y :

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}, \quad \leftarrow \text{Замена переменной} \quad (\text{A.12})$$

то можно будет привести его к виду линейного дифференциального уравнения. Попробуем это сделать. В дифференциальном уравнении Бернулли (5.11) разделим обе части на y^n :

$$\frac{1}{y^n} \frac{dy}{dx} + p(x) \frac{1}{y^{n-1}} = q(x). \quad (\text{A.13})$$

Однако если обе части уравнения (A.12) продифференцировать по x , получим:

$$\frac{dz}{dx} = -(n-1) \frac{1}{y^n} \frac{dy}{dx};$$

$$\therefore \frac{1}{y^n} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{n-1} \frac{dz}{dx}.$$

А теперь из того, что получилось, и из уравнения (A.12), произведя замену в уравнении (A.13), получим:

$$-\frac{1}{n-1} \frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x).$$

Чтобы стало более наглядно, умножим обе части уравнения на $1 - n$:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x). \quad \leftarrow \text{Неоднородное уравнение (линейное дифференциальное)}$$

Получили линейное дифференциальное уравнение. Теперь все в порядке. Неоднородное дифференциальное уравнение можно решить либо методом вариации произвольных постоянных, либо используя интегрирующий множитель. Другими словами, сделав уравнение Бернулли с помощью замены переменных линейным, мы сделали его подходящим для использования уже известных нам инструментов.

На стр. 107, когда мы с помощью разложения на простые дроби решили методом разложения переменных дифференциальное уравнение логистической модели, на самом деле это было уравнение Бернулли. Попробуем вспомнить, если P – это численность населения, K – это предельная численность населения, μ – коэффициент Мальтуса, то дифференциальное уравнение будет:

$$\frac{dP}{dt} = \mu \left(1 - \frac{P}{K} \right) P.$$

Преобразуем его немного:

$$\frac{dP}{dt} - \mu P = -\frac{\mu}{K} P^2 \quad \leftarrow \text{Дифференциальное уравнение Бернулли (нелинейное)} \quad (\text{A.14})$$

и, очевидно, получим дифференциальное уравнение Бернулли при $n = 2$.

Разделим обе части нелинейного дифференциального уравнения (A.14) на P^2 :

$$\frac{1}{P^2} \frac{dP}{dt} - \mu \frac{1}{P} = -\frac{\mu}{K}. \quad (\text{A.15})$$

Произведем замену зависимой переменной P :

$$z = \frac{1}{P}. \quad \leftarrow \text{Замена переменной} \quad (\text{A.16})$$

Продифференцируем по t :

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{P^2} \frac{dP}{dt};$$

$$\therefore \frac{1}{P^2} \frac{dP}{dt} = -\frac{dz}{dt}.$$

Подставим результат в нелинейное дифференциальное уравнение (A.15):

$$\frac{dz}{dt} + \mu z = \frac{\mu}{K}, \quad \leftarrow \text{Неоднородное уравнение (линейное дифференциальное)} \quad (\text{A.17})$$

и получаем линейное дифференциальное уравнение. Это неоднородное уравнение. Поэтому используем метод вариации произвольных постоянных. Прежде всего получим однородное уравнение:

$$-\frac{dz}{dt} - \mu z = 0. \quad \leftarrow \text{Однородное уравнение}$$

Решим его методом разделения переменных:

$$\int \frac{dz}{z} = -\mu \int dt.$$

Проинтегрируем обе части:

$$\ln|z| = -\mu t + C; \quad \leftarrow \text{Решение однородного уравнения} \quad (\text{A.18})$$

$$\therefore z(t) = \pm e^{-\mu t + C} = c e^{-\mu t}.$$

Здесь $c = \pm e^C$. Заменим c на функцию от времени $c(t)$:

$$c = c(t).$$

Тогда решение (A.18) будет:

$$z(t) = c(t) e^{-\mu t}.$$

Подставим это в неоднородное уравнение (A.17):

$$\begin{aligned} \frac{d(c(t)e^{-\mu t})}{dt} + \mu c(t)e^{-\mu t} &= \frac{\mu}{K}; \\ \frac{dc(t)}{dt} e^{-\mu t} + \frac{de^{-\mu t}}{dt} c(t) + \mu c(t)e^{-\mu t} &= \frac{\mu}{K}; \\ \frac{dc(t)}{dt} e^{-\mu t} - \mu e^{-\mu t} c(t) + \mu c(t)e^{-\mu t} &= \frac{\mu}{K}; \\ \frac{dc(t)}{dt} e^{-\mu t} &= \frac{\mu}{K}; \\ \frac{dc(t)}{dt} &= \frac{\mu}{K} e^{\mu t}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем:

$$c(t) = \frac{\mu}{K} \int e^{\mu t} dt = \frac{e^{\mu t}}{K} + c'.$$

Следовательно, решение будет таким:

$$z(t) = \left(\frac{e^{\mu t}}{K} + c' \right) e^{-\mu t}. \quad \leftarrow \text{Решение неоднородного уравнения}$$

Используя формулу (А.16), вернем переменную P вместо z :

$$P(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{\left(\frac{e^{\mu t}}{K} + c' \right) e^{-\mu t}} = \frac{Ke^{\mu t}}{e^{\mu t} + Kc'}. \quad \leftarrow \text{Решение дифференциального уравнения Бернулли} \quad (\text{А.19})$$

Так же как в предыдущем примере, возьмем начальный момент времени $t = 0$ и численность населения в этот момент, равную P_0 :

$$P_0 = \frac{Ke^{\mu \cdot 0}}{e^{\mu \cdot 0} + Kc'} = \frac{K}{1 + Kc'};$$

$$\therefore c' = \frac{K - P_0}{KP_0}.$$

Подставим это в решение (А.19):

$$P(t) = \frac{Ke^{\mu t}}{e^{\mu t} + K \left(\frac{K - P_0}{KP_0} \right)} = \frac{KP_0}{(K - P_0)e^{-\mu t} + P_0}.$$

И получим решение, абсолютно идентичное решению (3.7) на стр. 108¹⁶.

Подобно тому, как для достижения одной цели есть разные средства, так и решение одного дифференциального уравнения можно получить разными способами. Сначала нужно как следует освоить один способ, а затем можно развиваться дальше. Пусть способ решения дифференциального уравнения Бернулли (когда мы сперва привели его к линейному виду, затем нашли простое решение для однородного уравнения, после чего скорректировали это решение так, чтобы оно стало решением неоднородного уравнения) станет для вас таким вспомогательным средством.



¹⁶ Его можно было решить также и методом интегрирующего множителя.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Символ

Δ (дельта).....	34
Σ (сигма).....	57
$\int$ (интеграл).....	58

C

$\cos x$	40
$\cosh x$	41, 186

D

d	46
-----------	----

E

e^γ	38
------------------	----

L

$\lim$	46
$\ln x$	39

S

$\sin x$	40
$\sinh x$	41, 186

A

Амплитуда колебаний.....	170
--------------------------	-----

B

Вспомогательные переменные.....	76
Вынужденные колебания.....	202
Вязкое сопротивление.....	118

G

Гиперболическая функция.....	41, 186
Гиперболический косинус.....	41, 186
Гиперболический синус.....	41, 186
График.....	33

D

Десятичный логарифм.....	39
Дифференциал.....	47, 51
Дифференциальное уравнение Бернулли	224

Дифференциальное уравнение в частных производных.....	66
Дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами.....	67
Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.....	67
Дифференцирование сложных функций.....	174

E

Единицы измерения.....	35, 48
------------------------	--------

З

Зависимая переменная.....	31
Закон Гука.....	158
Закон Мальтуса.....	91, 93
Закон движения Ньютона.....	16
Закон охлаждения Ньютона.....	212
Закон Фехнера.....	216
Затухающие колебания.....	180, 182

И

Изменение между значениями переменной.....	34
Изменение температуры относительно времени.....	212
Инерционное сопротивление.....	118
Интеграл.....	58, 59
Интегральная константа.....	65
Интегральная переменная.....	58
Интегрирование подстановкой.....	107
Интегрирующий множитель.....	222
Интенсивность ощущения.....	216
Исходная функция.....	61

K

Классификация дифференциальных уравнений.....	66
Конечная скорость.....	137, 139, 143
Конечная скорость ракеты.....	215

Координаты	31
Коэффициент жесткости пружины	159
Коэффициент затухания колебаний	170
Коэффициент распада	102
Критическое затухание	190, 191

Л

Линейное дифференциальное уравнение	67
Линейный вид	225
Логарифмическая функция	39
Логарифмический декремент колебаний	183
Логистическая модель	105, 109, 225

М

Метод вариации произвольных постоянных	145, 148, 217, 224
Метод датировки	96
Метод разделения переменных	81, 100, 109, 212, 215, 216
Моделирование	12, 22, 74, 99, 123

Н

Натуральный логарифм	39
Начальное состояние	84, 101
Независимые переменные	31
Нелинейные дифференциальные уравнения	67
Неоднородные уравнения	67, 146, 224
Неопределенный интеграл	65

О

Общее решение	145
Обыкновенные дифференциальные уравнения	66
Однородные уравнения	67, 146
Определенный интеграл	65
Основная теорема интегрального исчисления	61, 63, 65
Основные свойства дифференцирования	53
Отрезок (на оси координат)	35

П

Параметр	76
Первоначальное местоположение	35
Переменные	30
Период полураспада	97, 102
Порядок функции	50, 66
Постоянная времени	183

Предел	45
Производная	46
Производная функции	49
Простые колебания	170

Р

Радиоактивный распад	96, 99
Разложение на простые дроби	107
Резонанс	202
Рост численности бактерий	93
Рост численности населения	93, 105
Рост численности оленей эдзо	74

С

Сила упругости	158
Сильное затухание	185, 187
Собственная угловая частота колебаний	170
Соппротивление воздуха	118
Степень	67

Т

Тригонометрические функции	40
----------------------------------	----

У

Угловая частота	170
Угловой коэффициент	34, 44
Угловой коэффициент касательной	44
Уклон	34
Уравнение движения	16

Ф

Формула интеграла	66
Формула производной	52, 53
Формула Эйлера	41, 180
Функция	29

Х

Характеристические уравнения	195
------------------------------------	-----

Ц

Цикл	170
------------	-----

Ч

Частное решение	145
Число Непера	38
Число Рейнольдса	121

Э

Экспоненциальная функция	38, 82, 88
Эффект рекламы	217

Книги издательства «ДМК Пресс» можно заказать в торгово-издательском холдинге «Планета Альянс» наложенным платежом, выслав открытку или письмо по почтовому адресу:

115487, г. Москва, 2-й Нагатинский пр-д, д. 6А.

При оформлении заказа следует указать адрес (полностью), по которому должны быть высланы книги; фамилию, имя и отчество получателя.

Желательно также указать свой телефон и электронный адрес.

Эти книги вы можете заказать и в интернет-магазине: **www.aliants-kniga.ru**.

Оптовые закупки: тел. **(499) 782-38-89**.

Электронный адрес: **books@aliants-kniga.ru**.

Сато Минору (автор), Адзума Секо (художник)

Занимательная математика

Дифференциальные уравнения

Манга

Главный редактор *Д. А. Мовчан*

dmkpress@gmail.com

Переводчик *С. Л. Плеханова*

Корректор *Г. И. Синяева*

Верстальщик *А. А. Чаннова*

Формат 70×100 1/16.

Гарнитура Anime Ace. Печать офсетная.

Усл. п. л. 22,3125. Тираж 500 экз.

Веб-сайт издательства www.dmkpress.com

